فصل ۲

فرکانس و شکل مودهای سیستم های چند درجه آزاد

۲-۱ مقدمه

در این فصل بردارها و مقادیر ویژه که در واقع همان فرکانس ها و شکل مودهای سیستم های چند درجه آزاد هستند بدست آورده شده و خواص آنها مورد بررسی قرار می گیرند. این مقادیر و بردارها از حل معادلهٔ مشخصهٔ سیستم بدست می آیند و معادلهٔ مشخصهٔ سیستم نیز بنوبهٔ خود از تحلیل ارتعاش آزاد بدست می آید. چنانچه قبلاً نیز گفته شد ارتعاش آزاد ارتعاشی است که سیستم بدون اینکه نیرویی به آن وارد شود انجام دهد.

در این فصل ابتدا مقادیر و بردارهای ویژهٔ سیستم های چند درجه آزاد معرفی شده و سپس خواص آنها مورد بررسی قرار می گیرند.

۲-۲ مقادیر و بردارهای ویژه

معادله ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزاد نامیرا به صورت زیر است:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{0\} \qquad (۲-۱)$$

یادآوری می شود که ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزاد به صورت هارمونیک به دست آمده بود. در مورد سیستم های چند درجه آزاد، هر یک از درجات آزادی یک حرکت هارمونیک دارند. بنابراین حل معادله حرکت فوق به صورت زیر است:

$$\{u(t)\}=\{\varphi\}\sin(\omega t+\theta) \qquad (۲-۲)$$

که در آن $\{\varphi\}$ یک بردار دلخواه، ω فرکانس و θ زاویه فاز می باشند.

این رابطه، باید در معادله حرکت صدق کند. با جایگذاری آن در معادله حرکت، رابطه زیر به دست می آید:

$$[m]\{\varphi\}\left(-\omega^2\sin(\omega t+\theta)\right)+[k]\{\varphi\}\sin(\omega t+\theta)=\{0\} \qquad (۲-۳)$$

این رابطه برای کلیه لحظات t صادق است در نتیجه می توان $\sin(\omega t+\theta)$ را از آن حذف نمود و به صورت زیر نوشت:

$$([k]-\omega^2[m])\{\varphi\}=\{0\} \qquad (۴-۲)$$

این معادله، یک دستگاه معادله جبری همگن است که عبارت درون پرانتز ماتریس ضرایب و $\{\varphi\}$ بردار مجهولات آن است. در واقع این معادله یک مسئله مقدار ویژهٔ ماتریسی است که در آن ω^2 مقدار ویژه و $\{\varphi\}$ بردار ویژه می باشند. این معادله را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$[k]\{\varphi\}=\omega^2[m]\{\varphi\} \qquad (۵-۲)$$

این معادله مسئله مقدار مشخصه (eigenvalue problem) نامیده می شود. علاوه بر ارتعاش، در بسیاری از مسائل مهندسی از جمله کمانش و انتقال حرارت نیز این معادله بدست می آید.

اگر معادله (۲-۵) در $[m]^{-1}$ضرب شود، معادله زیر بدست می آید:

$$[m]^{-1}[k]\{\varphi\}=\omega^2\{\varphi\} \qquad (۶-۲)$$

با تعریف $\lambda=\omega^2$ و $[A]=[m]^{-1}[k]$داریم:

$$[A]\{\varphi\}=\lambda\{\varphi\} \qquad (۷-۲)$$

و یا:

$$([A]-\lambda[I])\{\varphi\}=\{0\} \qquad (۸-۲)$$

که در آن $[I]$ ماتریس واحد (ماتریسی به ابعاد $N\times N$ که درایه های روی قطر آن واحد و سایر درایه ها صفر است) می باشد. به این معادله، فرم استاندارد مسئله مقدار ویژه اطلاق می شود. که در آن λ مقادیر ویژه (eigenvalue) و $\{\varphi\}$ بردار ویژه (eigenvector) نامیده می شوند. در پیوست این جزوه روی خواص این معادله بحث شده است.

در ارتعاشات فرم غیر استاندارد مسئله مقدار ویژه یعنی معادله (۲-۴) حل می شود. این معادله یک دستگاه معادله جبری است که عبارت درون پرانتز ماتریس ضرایب و $\{\varphi\}$مجهول است. سمت راست این معادله بردار صفر است. به همین دلیل دستگاه معادلات همگن می باشد.

در واقع معادله (۲-۴)، N معادله جبری است که مستقل نمی باشند و یکی از معادلات ترکیب خطی از N-1 معادله دیگر است. شرط اینکه این معادله جواب غیر صفر داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود.

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0 \qquad (۲-۹)$$

این معادله یک معادله جبری از مرتبه $(\omega^2)^N$ است و به آن معادلهٔ فرکانس گفته می شود. چون ماتریس های $[k]$ و $[m]$ ماتریس های مثبت معین هستند، این معادله N مقدار حقیقی مثبت و مجزا برای ω^2 دارد که به آنها مقادیر ویژه گفته می شود. مقادیر ωها را می توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد.

$$\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_N \qquad (۲-۱۰)$$

این مقادیر فرکانس های سیستم نامیده می شوند. بنابراین یک سیستم N درجه آزاد، N فرکانس دارد یعنی تعداد فرکانس های یک سیستم برابر با تعداد درجات آزادی آن است.

کوچکترین فرکانس، فرکانس اصلی (Fundamental Frequency) نامیده می شود. به ازای هر فرکانس یک دورهٔ تناوب وجود دارد. دورهٔ تناوب ها از بزرگ به کوچک مرتب می شوند.

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}>T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}>\cdots>T_N=\frac{2\pi}{\omega_N} \qquad (۲-۱۱)$$

بزرگترین دورهٔ تناوب، دورهٔ تناوب اصلی (Fundamental Period) نامیده می شود.

با قرار دادن فرکانس ω_i در معادله (۲-۴) خواهیم داشت:

$$\left([k]-\omega_i^2[m]\right)\{\varphi_i\}=\{0\}\ ,\ \ i=1,2,\cdots,N \qquad (۲-۱۲)$$

این معادله یک معادله جبری است که ماتریس ضرایب آن (عبارت درون پرانتز) معلوم است و بردار φ_i مجهول است. این بردار N سطر یعنی N مجهول دارد که همانطور که قبلا گفته شد یکی از آنها به بقیه وابسته است.در واقع N-1 معادله مستقل وجود دارد. برای اینکه مقادیر این بردار به صورت منحصر بفرد بدست آیند لازم است یک معادله به آن اضافه شود که در این صورت N معادله مستقل بدست می آید.

ساده ترین معادله ای که می توان اضافه نمود $\varphi_{1i}=1$ است یعنی سطر اول بردار $\{\varphi_i\}$برابر یک در نظر گرفته شود. بنابراین با حل معادله (۲-۱۲)، N بردار برای $\{\varphi_i\}$بدست می آید. به $\{\varphi_i\}$ شکل مود iام (mode shape) گفته می شود.

به عمل اضافه کردن یک معادله به معادله (۲-۱۲) برای اینکه جواب منحصر به فرد داشته باشد، همپایه نمودن (Normalization) بردار شکل مود گفته می شود. روش دیگری برای همپایه نمودن بردار شکل مود بعداً گفته خواهد شد.

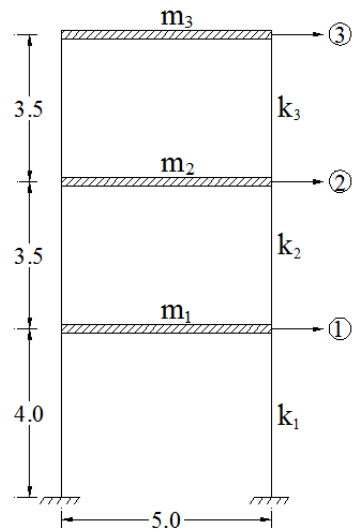
شکل مودها را می توان به صورت یک ماتریس N×N که ماتریس شکل مود (Mode Shape Matrix) نامیده می شود نشان داد.

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۲)$$

همچنین می توان فرکانس ها را در یک ماتریس قطری N×N نشان داد.

$$[\Omega]=\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۳)$$

مثال – فرکانس ها و شکل مودهای سازهٔ زیر را بدست آورید. ممان اینرسی ستون های طبقهٔ اول $I_1=19270\,cm^4$ و طبقات دوم و سوم $I_2=I_3=14920\,cm^4$ می باشند. جرم واحد طول طبقات اول و دوم $\overline{m}_1=\overline{m}_2=14\,ton/m$ و طبقهٔ سوم $\overline{m}_3=12\,ton/m$ می باشند. $E=200\ GPa$



حل -

سختی طبقات :

$$k_1 = 2\times\frac{12\times200\times10^9\times19270\times100^{-4}}{4^3} = 14.453\times10^6\ \text{N/m} = 14453\,\text{KN/m}$$

$$k_2 = k_3 = 2\times\frac{12\times200\times10^9\times14920\times100^{-4}}{3.5^3} = 16.703\times10^6\ \text{N/m} = 16703\,\text{KN/m}$$

ماتریس سختی :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31156 & -16703 & 0 \\ -16703 & 33407 & -16703 \\ 0 & -16703 & 16703 \end{bmatrix}\text{KN/m}$$

ماتریس جرم :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}\text{Ton}$$

معادلهٔ فرکانس :

$$\left|[K]-\omega^2[m]\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 31156-70\omega^2 & -16703 & 0 \\ -16703 & 33407-70\omega^2 & -16703 \\ 0 & -16703 & 16703-60\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\ 294000(\omega^2)^3 - 353005100(\omega^2)^2 + 101665649010(\omega^2) - 4032245490677 = 0$$

حل معادلهٔ فرکانس :

$$\omega_1^2 = 47.0458 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 6.8590 \text{ rad/sec} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 0.9160 \sec$$

$$\omega_2^2 = 373.8455 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 19.3351 \text{ rad/sec} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0.3250 \sec$$

$$\omega_3^2 = 779.8064 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 27.9250 \text{ rad/sec} \quad \Rightarrow \quad T_3 = 0.2250 \sec$$

حل معادلهٔ مشخصه :

$\underline{\omega_1^2 = 47.0458}$

$$\left([k] - \omega_1^2 [m]\right)\{\varphi_1\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 27863 & -16703 & 0 \\ -16703 & 30114 & -16703 \\ 0 & -16703 & 13880 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi_{11} = 1 \;\Rightarrow\; \{\varphi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.6681 \\ 2.0074 \end{Bmatrix}$$

$\underline{\omega_2^2 = 373.8455}$

$$\left([k] - \omega_2^2 [m]\right)\{\varphi_2\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 4987 & -16703 & 0 \\ -16703 & 7237 & -16703 \\ 0 & -16703 & -5728 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi_{12} = 1 \;\Rightarrow\; \{\varphi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.2986 \\ -0.8706 \end{Bmatrix}$$

$\underline{\omega_3^2 = 779.8064}$

$$\left([k] - \omega_3^2 [m]\right)\{\varphi_3\} = \{0\}$$

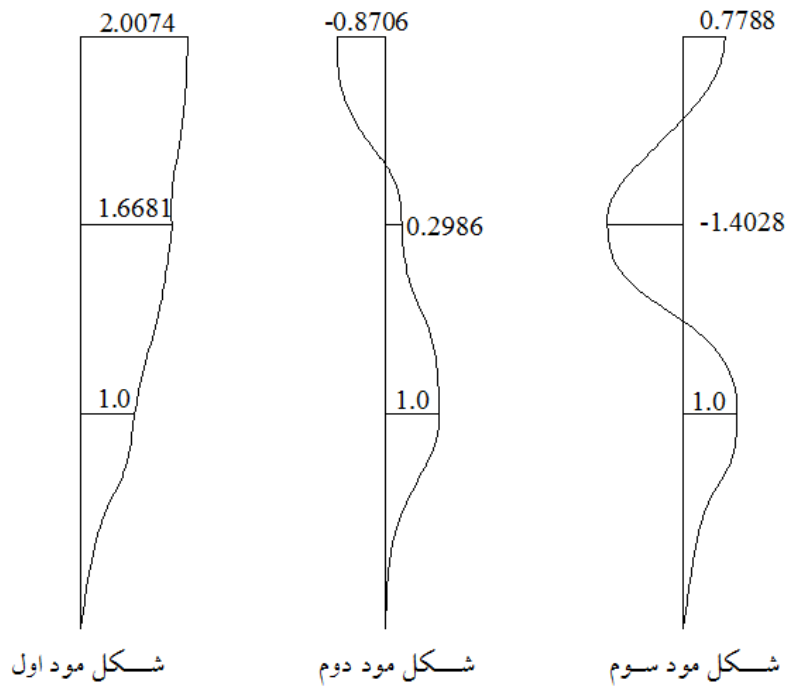
$$\begin{bmatrix} -23430 & -16703 & 0 \\ -16703 & -21180 & -16703 \\ 0 & -16703 & -30085 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi_{13}=1 \;\Rightarrow\; \{\varphi_3\}=\begin{Bmatrix}1\\-1.4028\\0.7788\end{Bmatrix}$$

ماتریس فرکانس ها و شکل مودها:

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}6.8590 & 0 & 0\\ 0 & 19.3351 & 0\\ 0 & 0 & 27.9250\end{bmatrix} \qquad [\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1.6681 & 0.2986 & -1.4028\\ 2.0074 & -0.8706 & 0.7788\end{bmatrix}$$

بردار شکل مودها را به صورت زیر می توان رسم نمود:



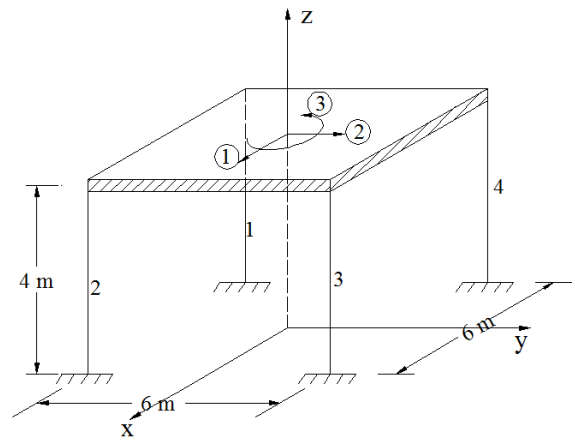
مثال – فرکانس ها و شکل مودهای قاب پیچشی نشان داده شده را بدست آورید.

جرم واحد سطح سقف $\overline{m} = 800\ \text{kg/m}^2$

ابعاد ستون های ۱ و ۲ : ۶۰×۶۰ cm

ابعاد ستون های ۳ و ۴ : ۳۰×۳۰ cm

ضریب الاستیسیته : E=20 GPa



حل –

سختی ستون های ۱ و ۲:

$$k_{x,1} = k_{y,1} = k_{x,2} = k_{y,2} = 12 \times \frac{EI}{L^3} = 12 \times \frac{20 \times 10^9 \times 0.6^4/12}{4^3} = 40.5 \times 10^6\ \text{N/m}$$

سختی ستون های ۳ و ۴:

$$k_{x,3} = k_{y,3} = k_{x,4} = k_{y,4} = 12 \times \frac{20 \times 10^9 \times 0.3^4/12}{4^3} = 2.53125 \times 10^6\ \text{N/m}$$

ماتریس سختی:

$$K_{11} = \sum k_{x,i} = 86.0625 \times 10^6\ \text{N/m}$$

$$K_{21} = K_{12} = 0$$

$$K_{13} = K_{31} = -\sum_{i=1}^{N} (k_{xi} \times y_i) = -[40.5(-3) + 40.5(-3) + 2.53125(3) + 2.53125(3)] \times 10^6 = 227.8125 \times 10^6\ \text{N/m}$$

$$K_{22} = \sum k_{y,i} = 86.0625 \times 10^6\ \text{N/m}$$

$$k_{32} = \sum_{i=1}^{N} (k_{yi} \times x_i) = k_{y,1}(-3) + k_{y,2}(3) + k_{y,3}(-3) + k_{y,4}(3) = 0$$

$$k_{33}=\sum_{i=1}^{N}\left(k_{xi}y_i^2+k_{yi}x_i^2\right)=1549.125\times10^6\ \text{N/m}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}86.0625 & 0 & 227.8125\\ 0 & 86.0625 & 0\\ 227.8125 & 0 & 1549.125\end{bmatrix}\times10^6\ \text{N/m}$$

ماتریس جرم :

$$[m]=\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & I_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800\times6\times6 & 0 & 0\\ 0 & 800\times6\times6 & 0\\ 0 & 0 & 800\times6\times6\times\dfrac{6^2+6^2}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28800 & 0 & 0\\ 0 & 28800 & 0\\ 0 & 0 & 172800\end{bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصه:

$$\begin{vmatrix}86062.5-28.8\omega^2 & 0 & 227.8125\\ 0 & 86062.5-28.8\omega^2 & 0\\ 227.8125 & 0 & 1549.125-172.8\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(86062.5-28.8\omega^2\right)-\left[\left(86062.5-28.8\omega^2\right)\left(1549125-172.8\omega^2\right)-227812.5^2\right]=0$$

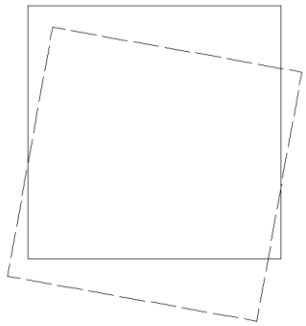
$$\omega_1^2=1576.76\ \Rightarrow\ \omega_1=39.7084\,\text{rad/sec}\ \Rightarrow\ T_1=0.1582\,\text{sec}$$

$$\omega_2^2=2988.28\ \Rightarrow\ \omega_2=54.6652\,\text{rad/sec}\ \Rightarrow\ T_2=0.1149\,\text{sec}$$

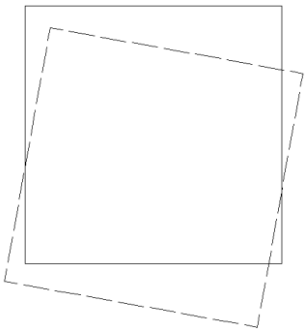
$$\omega_3^2=10376.36\ \Rightarrow\ \omega_3=101.8644\,\text{rad/sec}\ \Rightarrow\ T_3=0.06168\,\text{sec}$$

شکل مودهای ارتعاشی :

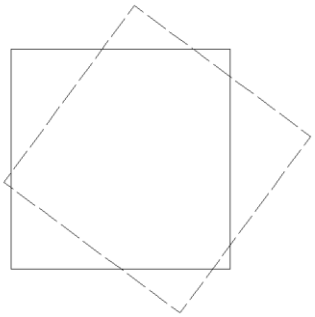
$$[\varphi]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -0.1784 & 0 & 0.934\end{bmatrix}$$



شکل مود اول



شکل مود دوم



شکل مود سوم

۲-۳ تعامد مودها

در این بخش نشان داده می شود که بردارهای شکل مود که در بخش قبل بدست آمدند بر یکدیگر عمود هستند. در واقع در جبر خطی نشان داده می شود که بردار های ویژهٔ یک ماتریس بر هم عمود هستند، لیکن در اینجا عمود بودن برای بردارهای شکل مودها اثبات می شود.

قضیه ۱- ثابت کنید که اگر i و j دو مود مختلف باشند آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\}=0$$

به این رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس جرم گفته می شود.

اثبات : طرفین رابطهٔ (۲-۱۲) را در $\{\varphi_j\}^T$ ضرب می کنیم :

$$\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_i\} \qquad (۱۴-۲)$$

این رابطه را ترانهاده می کنیم. توجه شود که از جبر ماتریسی داریم $([A][B][C])^T = [C]^T[B]^T[A]^T$ و همچنین چون ماتریس های جرم و سختی متقارن هستند $[m]^T = [m]$ و $[K]^T = [K]$. بنابراین :

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\} = \omega_i^2\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} \qquad (۱۵-۲)$$

حال رابطه (۲-۱۲) را برای مود دلخواه j می نویسیم:

$$[K]\{\varphi_j\} = \omega_j^2[m]\{\varphi_j\} \qquad (۱۶-۲)$$

این رابطه را در $\{\varphi_i\}^T$ ضرب می کنیم :

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\} = \omega_j^2\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} \qquad (۱۷-۲)$$

چون سمت چپ تساوی های (۲-۱۵) و (۲-۱۷) مساوی هستند، سمت راست آنها نیز باید مساوی باشند. پس:

$$\omega_i^2\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} = \omega_j^2\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} \qquad (۱۸-۲)$$

سمت راست تساوی فوق را به سمت چپ برده و از $\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\}$ فاکتور می گیریم :

$$\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} = 0 \qquad (۱۹-۲)$$

اگر i و j مودهای متفاوتی باشند فرکانس های آنها با یکدیگر مساوی نخواهند بود بنابراین عبارت درون پرانتز در رابطه فوق صفر نمی شود در نتیجه عبارت جلوی پرانتز صفر می شود:

$$i \neq j \;\Rightarrow\; \omega_i \neq \omega_j \;\Rightarrow\; \{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\} = 0 \qquad (۲۰-۲)$$

قضیه ۲- ثابت کنید که اگر i و j دو مود مختلف باشند آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\} = 0$$

به این رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی گفته می شود.

اثبات : برای مودهای مختلف ($i \neq j$) چون $\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\}=0$ آنگاه با استفاده از رابطه (۲-۱۵) داریم :

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\}=0 \qquad (۲-۲۱)$$

قضیه ۳- ثابت کنید که اگر i و j دو مود مختلف باشند و ماتریس میرایی ترکیبی از ماتریس های جرم و سختی باشند آنگاه تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار است.

اثبات :

اگر ماتریس میرایی ترکیبی از ماتریس های جرم و سختی باشند آنگاه می توان نوشت :

$$[C]=\alpha[m]+\beta[K] \qquad (۲-۲۲)$$

که در آن α و β ضرایب ثابتی هستند. این رابطه را در $\{\varphi_i\}^T$ از سمت چپ و در $\{\varphi_j\}$ از سمت راست ضرب می کنیم:

$$\{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_j\}=\alpha\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_j\}+\beta\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\} \qquad (۲-۲۳)$$

حال اگر مودهای i و j مختلف باشند بر اساس روابط(۲-۲۰) و (۲-۲۱) سمت راست این رابطه صفر است پس:

$$\{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_j\}=0 \qquad (۲-۲۴)$$

به این رابطه، رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی گفته می شود.

لازم به ذکر است که رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی تنها در صورتی برقرار است که ماتریس میرایی را بتوان به صورت ترکیبی از ماتریس های جرم و سختی بیان کرد. در این صورت میرایی سازه را میرایی متناسب (Proportional Damping) می نامند. میرایی غالب سازه های معمولی چنین خاصیتی دارند. ولی سازه هایی که در آن اندرکنش دو سیستم با خواص میرایی متفاوت مطرح است، متناسب بودن میرایی برقرار نخواهد بود.

مثال – برای مثال اول بخش ۲-۲ رابطهٔ تعامد مودها را کنترل کنید.

$$\{\varphi_1\}^T[m]\{\varphi_2\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0.2986\\ -0.8706\end{Bmatrix}=0$$

$$\{\varphi_1\}^T[m]\{\varphi_3\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1.4028\\ 0.7788\end{Bmatrix}=0$$

$$\{\varphi_2\}^T[m]\{\varphi_3\}=\begin{bmatrix}1 & 0.2986 & -0.8706\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1.4028\\ 0.7788\end{Bmatrix}=0$$

$$\{\varphi_1\}^T[k]\{\varphi_2\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31156 & -16703 & 0\\ -16703 & 33407 & -16703\\ 0 & -16703 & 16703\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0.2986\\ -0.8706\end{Bmatrix}=0$$

$$\{\varphi_1\}^T[k]\{\varphi_3\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31156 & -16703 & 0\\ -16703 & 33407 & -16703\\ 0 & -16703 & 16703\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1.4028\\ 0.7788\end{Bmatrix}=0$$

$$\{\varphi_2\}^T[k]\{\varphi_3\}=\begin{bmatrix}1 & 0.2986 & -0.8706\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31156 & -16703 & 0\\ -16703 & 33407 & -16703\\ 0 & -16703 & 16703\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1.4028\\ 0.7788\end{Bmatrix}=0$$

۲-٤ خواص مودی سیستم های چند درجه آزاد

اگر دو مود دلخواه i و j یکی باشند آنگاه فرکانس های آنها با یکدیگر مساوی هستند و عبارت درون پرانتز در رابطه (۲-۱۹) صفر می شود و عبارت جلوی آن صفر نیست :

$$i=j \Rightarrow \omega_i=\omega_j \Rightarrow \{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_i\}\neq 0 \Rightarrow M_i=\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_i\} \qquad (۲-۲۴)$$

به M_i جرم مودی i گفته می شود. به همین ترتیب اگر دو مود دلخواه i و j یکی باشند، آنگاه :

$$i = j \Rightarrow \omega_i = \omega_j \Rightarrow \{\varphi_i\}^T [k] \{\varphi_i\} \neq 0 \Rightarrow K_i = \{\varphi_i\}^T [k] \{\varphi_i\} \qquad (۲۵-۲)$$

به K_i سختی مودی i گفته می شود. به همین ترتیب میرایی مودی i به صورت زیر تعریف می شود.

$$C_i = \{\varphi_i\}^T [c] \{\varphi_i\} \qquad (۲۶-۲)$$

اصطلاحاً گفته می شود که ماتریس شکل مودها، ماتریس های جرم، سختی و میرایی را قطری می کنند، چون:

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_N \end{bmatrix} \qquad (۲۷-۲)$$

$$[K] = [\Phi]^T [k] [\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix}$$

$$[C] = [\Phi]^T [c] [\Phi] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_N \end{bmatrix}$$

به ماتریس های فوق، ماتریس های مودی گفته می شوند.

با استفاده از رابطهٔ (۲-۱۴) می توان فرکانس سیستم را به صورت زیر نیز نوشت:

$$K_i = \omega_i^2 M_i \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} \qquad (۲۸-۲)$$

همچنین میرایی مودی نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$C_i = 2\xi_i M_i \omega_i \qquad (۲۹-۲)$$

که در آن ξ_i نسبت میرایی مود i می باشد. بنابراین ماتریس های سختی و میرایی مودی به صورت زیر نوشته می شود.

$$[K]=\begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 M_N \end{bmatrix} \qquad (۳۰-۲)$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_N\omega_N M_N \end{bmatrix}$$

مثال – سختی و جرم مودی مثال اول بخش ۲-۲ را بدست آورید.

$$M_1=\{\varphi_1\}^T[m]\{\varphi_1\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1.6681\\ 2.0074\end{Bmatrix}=506.5582\,\text{ton}$$

$$M_2=\{\varphi_2\}^T[m]\{\varphi_2\}=\begin{bmatrix}1 & 0.2986 & -0.8706\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0.2986\\ -0.8706\end{Bmatrix}=121.7210\,\text{ton}$$

$$M_3=\{\varphi_3\}^T[m]\{\varphi_3\}=\begin{bmatrix}1 & -1.4028 & 0.7788\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1.4028\\ 0.7788\end{Bmatrix}=244.1348\,\text{ton}$$

$$K_1=\{\varphi_1\}^T[k]\{\varphi_1\}=\begin{bmatrix}1 & 1.6681 & 2.0074\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31156 & -16703 & 0\\ -16703 & 33407 & -16703\\ 0 & -16703 & 16703\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1.6681\\ 2.0074\end{Bmatrix}=23831\,\text{KN/m}$$

$$K_2 = \{\varphi_2\}^T [k] \{\varphi_2\} = [1 \quad 0.2986 \quad -0.8706] \begin{bmatrix} 31156 & -16703 & 0 \\ -16703 & 33407 & -16703 \\ 0 & -16703 & 16703 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.2986 \\ -0.8706 \end{Bmatrix} = 45505 \text{ KN/m}$$

$$K_3 = \{\varphi_3\}^T [k] \{\varphi_3\} = [1 \quad -1.4028 \quad 0.7788] \begin{bmatrix} 31156 & -16703 & 0 \\ -16703 & 33407 & -16703 \\ 0 & -16703 & 16703 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.4028 \\ 0.7788 \end{Bmatrix} = 190380 \text{ KN/m}$$

۲-۵ همپایه کردن شکل مودها

چنانچه قبلاً گفته شد، معادلهٔ (۲-۱۲) یک دستگاه معادلهٔ همگن است. مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب این دستگاه معادله سبب می شود که این دستگاه معادله جواب غیرصفر داشته باشد، لیکن معادلات حاصل مستقل از یکدیگر نیستند. در واقع یک معادله وابسته به سایر معادلات می باشد. بنابراین بینهایت جواب غیرصفر برای این دستگاه معادله بدست می آید. برای اینکه جواب به صورت منحصر به فرد بدست آید لازم است که یک معادله دیگر به این دستگاه معادلات اضافه شود. قبلاً این معادله به این صورت انتخاب شده بود که درایهٔ اول بردار شکل مودها برابر ۱/۰ درنظر گرفته شده بود. به این عمل همپایه نمودن بردار شکل مود گفته می شود. در این بخش روش دیگری برای همپایه کردن بردار شکل مود مطرح می شود.

در این روش بردار شکل مود طوری انتخاب می شود که جرم مودی برابر واحد شود. برای این منظور کافیست بردار شکل مود که قبلاً بدست آمده بود بر $\sqrt{M_i}$ تقسیم شود.

$$\{\varphi_i'\} = \frac{\{\varphi_i\}}{\sqrt{M_i}} \tag{۳۱-۲}$$

با این شکل مود، جرم مودی برابر است با:

$$M_i' = \{\varphi_i'\}^T [m] \{\varphi_i'\} = \frac{\{\varphi_i\}^T}{\sqrt{M_i}} \times [m] \times \frac{\{\varphi_i\}}{\sqrt{M_i}} = \frac{M_i}{M_i} = 1.0 \tag{۳۲-۲}$$

به این روش، همپایه کردن شکل مود نسبت به ماتریس جرم گفته می شود. بنابراین ماتریس های مودی به صورت زیر در می آیند:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{۳۳-۲}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_N\omega_N \end{bmatrix}$$

مثال – ماتریس شکل مودهای مثال اول بخش ۲-۲ را نسبت به ماتریس جرم همپایه نمایید.

با استفاده از این مثال ۲-۲ داریم:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.6681 & 0.2986 & -1.4028 \\ 2.0074 & -0.8706 & 0.7788 \end{bmatrix}$$

همچنین با استفاده از مثال بخش ۲-۴ داریم:

$$M_1 = 506.5583 \text{ ton} \quad , M_2 = 121.7210 \text{ ton} \quad , \; M_3 = 244.1348 \text{ ton}$$

$$\{\phi_1'\} = \frac{1}{\sqrt{M_1}}\{\phi_1\} = \frac{1}{\sqrt{506.5583}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.6681 \\ 2.0074 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0444 \\ 0.0741 \\ 0.0892 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2'\} = \frac{1}{\sqrt{M_2}}\{\phi_2\} = \frac{1}{\sqrt{121.7210}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.2986 \\ -0.8706 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0906 \\ 0.0271 \\ -0.0789 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_3'\} = \frac{1}{\sqrt{M_3}}\{\phi_3\} = \frac{1}{\sqrt{244.1348}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.4028 \\ 0.7788 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0640 \\ -0.0898 \\ 0.0498 \end{Bmatrix}$$

تمرینات

۱- ماتریس های جرم و سختی یک سیستم دینامیکی به صورت زیر بدست آمده است.

$$[k]=k\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad [m]=m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

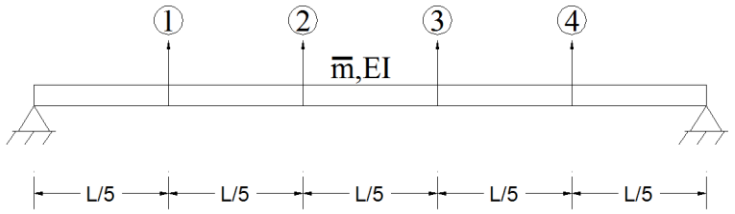
(الف) فرکانس ها و شکل مودها را محاسبه کنید. شکل مودها را نسبت به سطر اول همپایه کنید. (پ) شکل مودها را نسبت به ماتریس جرم همپایه کنید. (ت) تعامد مودها نسبت به ماتریس های جرم و سختی تحقیق کنید. (ث) جرم و سختی های مودی را بدست آورید.

جواب: (الف) $\omega=\begin{Bmatrix}0.8120\\ 1.2957\\ 1.7781\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{k}{m}}$ و $[\varphi]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1.3407 & 0.3210 & -1.1617\\ 0.7974 & -0.8969 & 0.3496\end{bmatrix}$

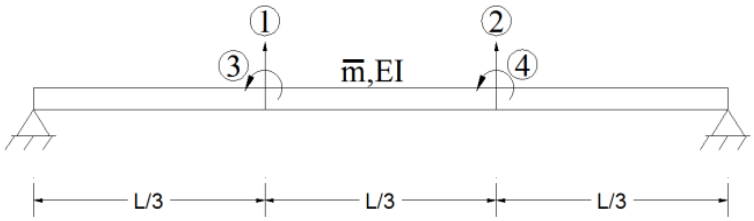
۲- یک تیریکنواخت دوسرساده به طول L سختی خمشی EI و جرم واحد طول $\overline{m}$ را به دو صورت (a) یا (b) می توان مدلسازی نمود. برای هر یک از مدلها موارد زیر را حساب کنید. (الف) ماتریس های سختی و جرم (ب) فرکانس ها و شکل مودهای همپایه شده نسبت به سطر اول و ترسیم آنها (پ) شکل مودها ی همپایه شده نسبت به ماتریس جرم (ت) جرم و سختی های مودی

همچنین تعامد مودها نسبت به ماتریس های جرم و سختی را تحقیق نمایید.

به نظر شما کدام مدل بهتر است؟

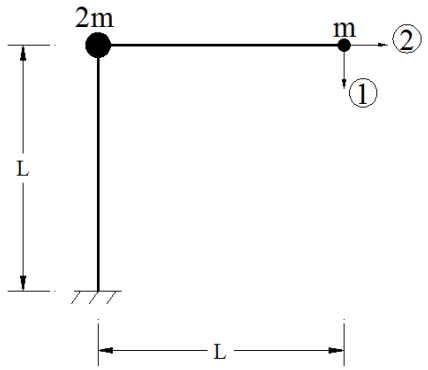


(a)

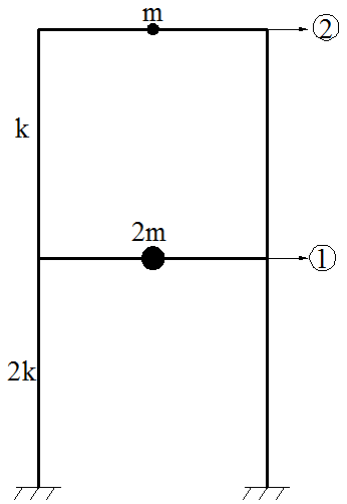


(b)

۳- سختی تیر و ستون سازهٔ نشان داده شده EI است. فرکانس ها و شکل مودهای آن را بدست آورید. شکل مودها را نسبت به تغییرمکان قائم انتهای آزاد تیر همپایه نمایید. شکل مودها را ترسیم کنید.



۴- فرکانس ها و شکل مودهای سیستم نشان داده شده را بدست آورید. شکل مودها را نسبت به ماتریس جرم همپایه نمایید. شکل مودها را ترسیم کنید.



۵- ماتریس های جرم و سختی یک سیستم دینامیکی به صورت زیر بدست آمده است.

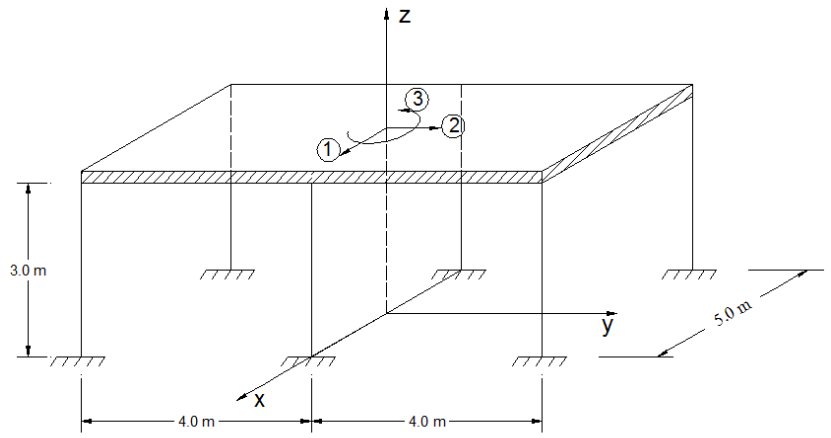
$$[k]=k\begin{bmatrix}4 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad [m]=m\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(الف) معادلهٔ مشخصهٔ استاندارد آن را بدست آورید. (ب) معادلهٔ مشخصهٔ استاندارد را حل نموده و مقادیر و بردارهای ویژهٔ آن را محاسبه نمایید. (پ) با استفاده از این مقادیر فرکانس های سیستم را بدست آورید.

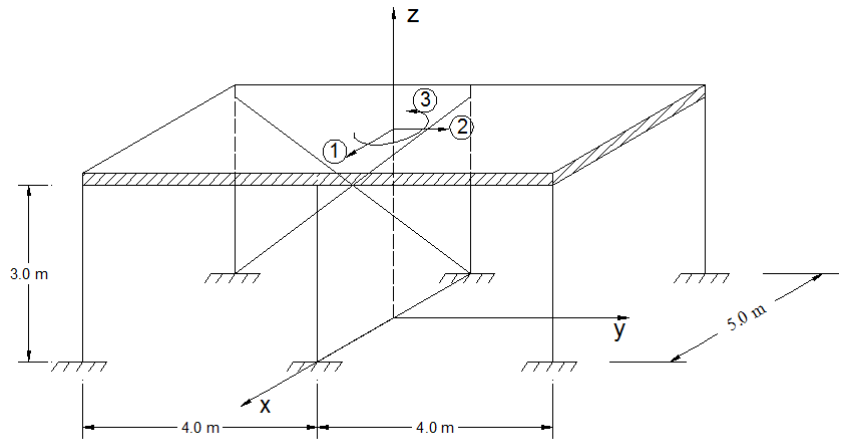
۶- دو سازهٔ (a) و (b) مشابه یکدیگرند با این تفاوت که سیستم (a) کاملاً متقارن است ولی سیستم (b) بادبند دارد. برای هر یک از سازه ها مطلوبست : (الف) ماتریس های سختی و جرم (ب) فرکانس ها و شکل مودهای همپایه شده نسبت به ماتریس جرم و ترسیم آنها (پ) جرم و سختی های مودی (ت) تحقیق تعامد مودها نسبت به ماتریس های جرم و سختی

ستون ها : قوطی ۱۴ بادبندها : نبشی ۱۴

جرم واحد سطح سقف : ۸۰۰ کیلوگرم بر متر مربع ضریب الاستیسیته : ۲۰۰ گیگاپاسکال



(a)



(b)