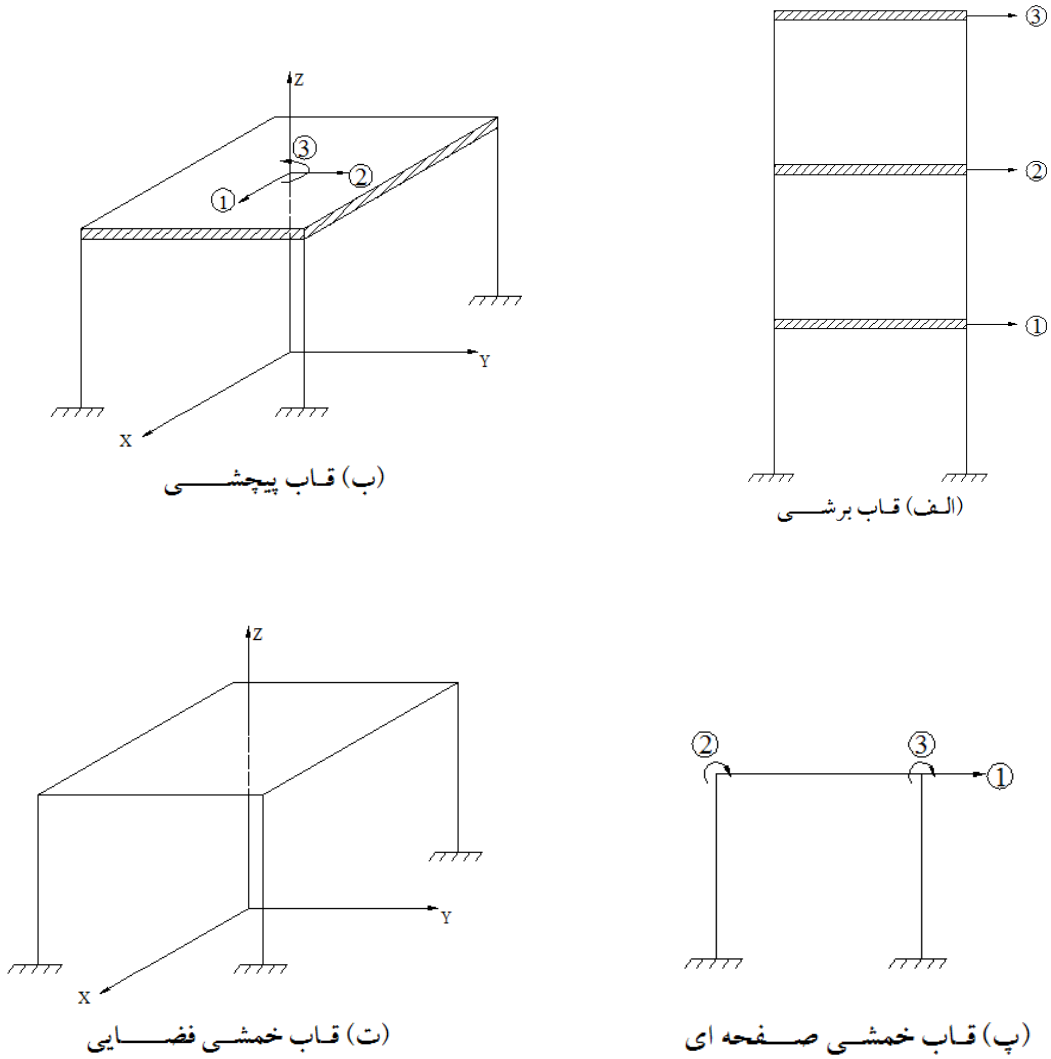
فصل ۱

معادلهٔ حرکت سیستم های چند درجه آزاد

۱-۱- مقدمه

سیستم های چند درجه آزاد سیستم هایی هستند که جابجایی آنها در چند نقطه تعریف می شود. مثال هایی از این سیستم ها در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.



شکل (۱-۱) نمونه هایی از سیستم های چند درجه آزاد ساختمانی

(اعداد درون دایره شمارهٔ درجات آزادی است)

در شکل (۱-۱ الف) قاب دو بعدی سه طبقه ای نشان داده شده است که طبقات آن به صورت صلب فرض می شود. در نتیجه هر طبقه آن فقط یک حرکت افقی دارد. بنابراین هر طبقه دارای یک درجه آزادی است. به این قاب ها، اصطلاحاً قاب های برشی گفته می شود. یک قاب برشی N طبقه، N درجه آزادی دارد.

در شکل (۱-۱ ب) یک قاب یک طبقه سه بعدی نشان داده شده است. سقف این طبقه نیز صلب در نظر گرفته می شود. این سقف می تواند یک تغییر مکان در جهت x، یک تغییر مکان در جهت y و یک دوران حول محور z داشته باشد. در نتیجه سقف این قاب سه درجه آزادی دارد. به این نوع قاب ها، قاب های پیچشی گفته می شود. هر طبقه از قاب های پیچشی سه درجه آزادی دارد. بنابراین یک قاب N طبقه پیچشی، $3\times N$ درجه آزادی دارد.

شکل (۱-۱ پ) قاب یک طبقه یک دهانه ای را نشان می دهد که سقف آن صلب نیست. بنابراین گره های سقف می توانند دوران کند، همچنین سقف می تواند در راستای افقی نیز حرکت کند. اگر از تغییر مکان های محوری تیر و ستون ها صرفنظر شود این قاب سه درجه آزادی دارد. در حالت کلی هر طبقه از قاب خمشی صفحه ای یک درجه آزادی انتقالی و هر گره یک درجه آزادی دورانی دارد.

البته در همین قاب اگر از تغییر مکان های محوری صرفنظر نشود، هر گره علاوه بر اینکه می تواند در راستای افقی تغییر مکان نماید در راستای قائم نیز می تواند حرکت کند. بنابراین هر گره سه درجه آزادی دارد. در حالت کلی اگر یک قاب خمشی صفحه ای N گره داشته باشد، با در نظر گرفتن تغییر مکانهای محوری $3\times N$، درجه آزادی دارد.

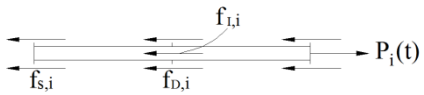
در شکل (۱-۱ ت) یک قاب خمشی فضایی نشان داده شده است که سقف آن صلب نیست. در حالت کلی هر گره از این قاب ۶ درجه آزادی داردکه شامل سه درجه آزادی جابجایی و سه درجه آزادی دورانی می باشد. بنابراین اگر یک قاب فضایی N گره داشته باشد تعداد درجات آزادی آن $3\times N$ می شود.

مثال های فوق بیشتر در سازه های ساختمانی کاربرد دارند. سایر سازه ها مثل خرپاها، قاب های شیبدار، سدها، و سایر سازه های پیوسته را نیز می توان به صورت سیستم های چند درجه آزاد مدلسازی نمود.

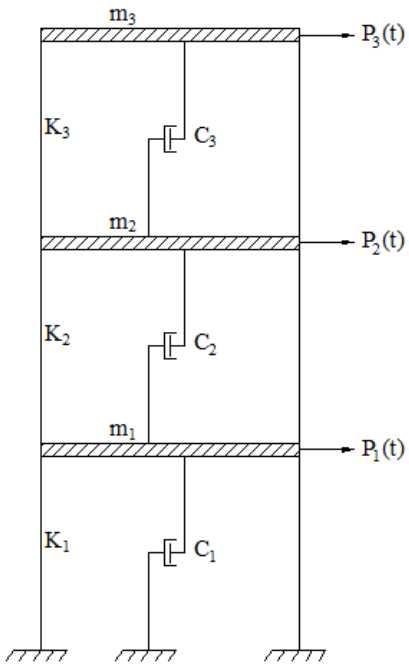
در این فصل معادلات حرکت این نوع سیستم ها بدست می آید.

۱-۲- معادله حرکت سیستم های چند درجه آزاد

در این بخش به عنوان نمونه معادلهٔ حرکت یک قاب برشی N طبقه (شکل ۱-۲ الف) بدست آورده می شود. سختی، میرایی، جرم و نیروی طبقهٔ i ام (که همان درجه آزادی i ام است) به ترتیب برابر با K_i، C_i، m_i، $P_i(t)$ می باشند. نمودار جسم آزاد طبقه i ام (درجه آزادی i ام) در شکل ۱-۲ب نشان داده شده است. در این شکل $f_{s,i}$ نیروی ارتجاعی، $f_{D,i}$ نیروی میرایی، $f_{I,i}$ نیروی اینرسی و $P_i(t)$ نیروی خارجی طبقه i ام هستند.



(ب) نمـودار جسم آزاد درجهٔ آزادی i ام



(الـف) سیســـــتم چند درجه آزاد

شکل (۱-۲)

معادله تعادل این طبقه به صورت زیر است:

$$f_{I,i} + f_{D,i} + f_{s,i} = P_i(t) \qquad (۱-۱)$$

که البته i می تواند بین ۱ تا N باشد. این رابطه را به صورت برداری می توان نوشت:

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{P(t)\} \qquad (۱-۲)$$

که در آن :

$\{f_I\}$ ، $\{f_D\}$ ، $\{f_S\}$ و $\{P(t)\}$ به ترتیب بردار نیروهای اینرسی، میرایی، فنری و خارجی می باشند و برابرند با:

$$\{f_I\} = \begin{Bmatrix} f_{I,1} \\ f_{I,2} \\ \vdots \\ f_{I,N} \end{Bmatrix} \qquad (۱-۳)$$

$$\{f_D\} = \begin{Bmatrix} f_{D,1} \\ f_{D,2} \\ \vdots \\ f_{D,N} \end{Bmatrix} \quad (۴-۱)$$

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{S,1} \\ f_{S,2} \\ \vdots \\ f_{S,N} \end{Bmatrix} \quad (۵-۱)$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_N(t) \end{Bmatrix} \quad (۶-۱)$$

در ادامه هر یک از این بردارها محاسبه می شوند.

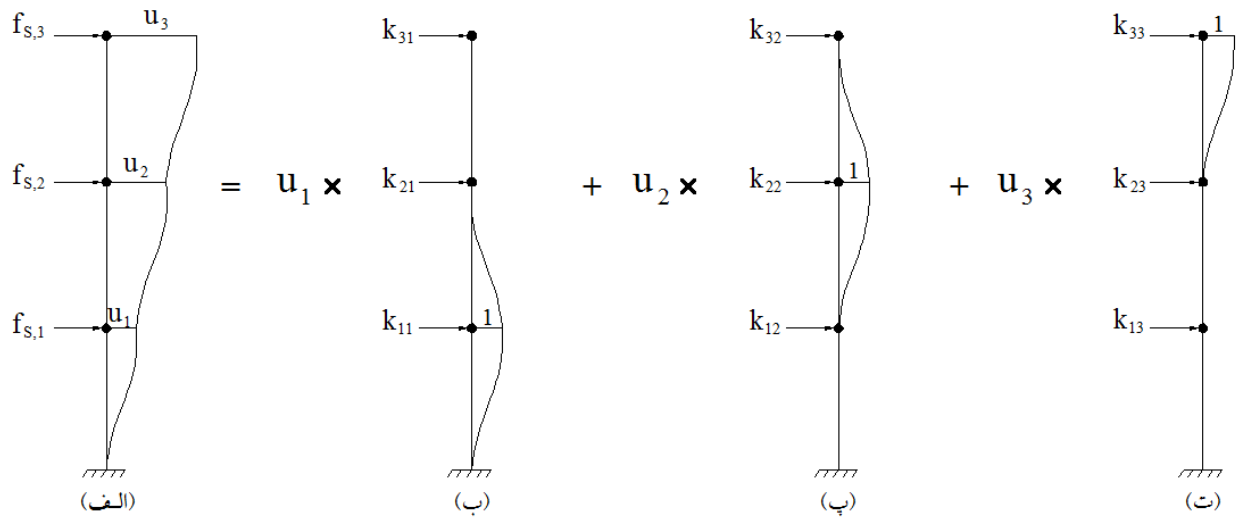
لازم به ذکر است که هرچند معادلهٔ (۱-۲) برای قاب های برشی بدست آمده، لیکن این معادله کلی بوده و برای هر نوع سیستم چند درجه آزاد قابل استفاده است.

۱-۳- بردار نیروهای ارتجاعی

برای محاسبه بردار نیروهای ارتجاعی دو روش کلی سختی و نرمی وجود دارد.

۱-۳-۱ روش سختی

برای تشریح این روش یک قاب برشی ۳ درجه آزاد در نظر گرفته می شود. به هر یک از درجات آزادی نیروهای $f_{S,1}$،$f_{S,2}$،$f_{S,3}$ وارد می گردد که سبب می شود تغییر مکان های u_1،u_2، u_3 درهر یک از درجات آزادی بوجود آید(شکل ۱-۳ الف). در این شکل برای سادگی هر یک از طبقات به صورت یک دایرهٔ توپر نشان داده شده است.



شکل (۱-۳) محاسبهٔ بردار نیروهای ارتجاعی با روش سختی

حال همان سیستم در نظر گرفته می شود ولی نیروهای k_{31}،k_{21}،k_{11} به میزانی به آن وارد می شوند که تغییر مکان درجه آزادی i، برابر واحد و سایر درجات آزادی صفر شود(شکل ۱-۳ب). مجددا همان سیستم در نظر گرفته شده ولی نیروهای k_{32}،k_{22}،k_{12} طوری به آن وارد می شوند که تغییر مکان درجه آزادی ۲ برابر واحد و سایر درجات آزادی صفر شود. (شکل ۱-۳پ). در نهایت همان سیستم در نظر گرفته شده ولی نیروهای k_{33}،k_{23}،k_{13} طوری به آن وارد می شودکه تغییر مکان درجه آزادی ۳ برابر واحد و سایر درجات آزادی صفر شود. (شکل ۱-۳ت).

چون سیستم خطی – ارتجاعی در نظر گرفته می شود، اصل جمع آثار قوا صادق است. بنابراین می توان گفت که اگر تغییر مکان های سیستم های ب، پ و ت را به ترتیب در u_1،u_2، u_3 ضرب کرده و تغییر مکان های حاصل را با هم جمع نماییم، تغییر مکان سیستم الف بدست می آید. به همین ترتیب اگر نیروهای سیستم های ب، پ، ت را در همین ضرایب ضرب کرده و با یکدیگر جمع کنیم، نیروهای سیستم الف بدست می آید. در نتیجه می توان نوشت:

$$f_{s1} = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3$$

$$f_{s2} = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 \qquad (۱-۷)$$

$$f_{s3} = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3$$

این روابط برای سیستم ۳ درجه آزاد بدست آمده است. بدیهی است اگر سیستم بجای ۳ درجه آزادی، دارای N درجه آزادی باشد این روابط به صورت زیر در می آیند.

$$\begin{aligned} f_{s1} &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \cdots + k_{1N}u_N \\ f_{s2} &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \cdots + k_{2N}u_N \\ &\vdots \\ f_{sN} &= k_{N1}u_1 + k_{N2}u_2 + \cdots + k_{NN}u_N \end{aligned} \tag{۱-۸}$$

این N معادله را می توان بصورت ماتریسی نوشت:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ \vdots \\ f_{sN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \tag{۱-۹}$$

ملاحظه می شود که سمت چپ این تساوی، همان بردار نیروهای ارتجاعی $\{f_s\}$ می باشد. بردار سمت راست این تساوی تغییر مکان درجات آزادی مختلف است که برابرند با:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \tag{۱-۱۰}$$

ماتریسی که سمت راست تساوی (۱-۹) وجود دارد، ماتریس سختی نامیده می شود و برابر است با:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \tag{۱-۱۱}$$

بنابراین رابطه (۱-۹) را بصورت زیر می توان نوشت:

$$\{f_s\} = [k]\{u\} \tag{۱-۱۲}$$

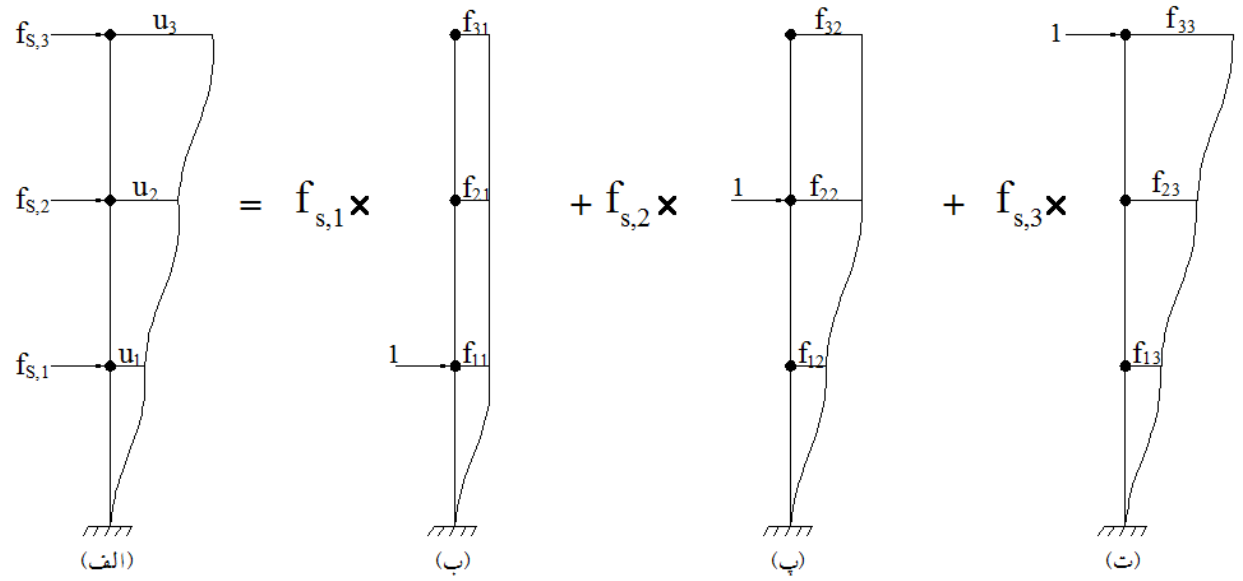
هر یک از درایه های ماتریس سختی، ضریب تأثیر سختی نامیده می شود. در واقع ضریب تأثیر سختی k_{ij} نیرویی لازم در درجه آزادی i ام برای ایجاد تغییر مکان واحد در درجهٔ آزادی j و تغییر مکان صفر در سایر درجات آزادی می باشد. به عبارت دیگر برای بدست آوردن ستون i ام این ماتریس، باید سیستم نیروهایی را بدست آورد که به درجه آزادی j ام تغییر مکان واحد و به سایر درجات آزادی تغییر مکان صفر بدهد.

مهمترین خواص ماتریس سختی عبارت است از:

۱. مربع است. یعنی تعداد سطر و ستون های آن با هم برابر است.
۲. متقارن است. یعنی $k_{ij} = k_{ji}$. این خاصیت با استفاده از قانون بتی – ماکسول به راحتی قابل اثبات است .
۳. مثبت معین است. یعنی دترمینان کلیه زیر ماتریس هایی که روی قطر اصلی آن وجود دارد مثبت هستد. این خاصیت مختص سازه های پایدار است. بر اساس این خاصیت این ماتریس N مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد.
۴. دترمینان ماتریس سختی سازه های پایدار مثبت است. بنابراین ماتریس سختی آنها معکوس پذیر می باشند. البته این خاصیت در بند ۳ نهفته است ولی بدلیل اهمیت آن در این بند مجدداً تکرار شده است. اگر سازه ای ناپایدار باشد دترمینان ماتریس سختی آن صفر می شود. در واقع یک روش برای تشخیص ناپایداری سازه این است که دترمینان ماتریس سختی آن محاسبه شود اگر صفر بود، ناپایدار است. لازم به ذکر است که تحت هیچ شرایطی (حتی ناپایداری) دترمینان ماتریس سختی منفی نمی شود. همچنین درایه های روی قطر ماتریس سختی نیز هرگز منفی نمی شوند.

۱-۳-۲ روش نرمی

برای تشریح این روش نیز قاب برشی سه طبقه در نظر گرفته می شود که به درجات آزادی ۱، ۲ و ۳ آن نیروهای f_{S1}،f_{S2}،f_{S3} وارد می شود و تحت اثر این نیروها تغییر مکان های u_1،u_2، u_3 می دهد.



شکل (۱-۴) محاسبه بردار نیروی های ارتجاعی با روش نرمی

حال همان سیستم را در نظر می گیریم که به درجه آزادی ۱ آن نیروی واحد وارد می شود (شکل ۱-۴ب). بر اثر این نیروها تغییر مکان های f_{31}،f_{21}،f_{11} در درجات آزادی مختلف آن بوجود می آید.

یکبار دیگر این سیستم را در نظر گرفته و به درجه آزادی ۲ آن نیروی واحد اعمال می کنیم (شکل ۱-۴پ). بر اثر این نیرو تغییر مکان های f_{32}،f_{22}،f_{12} در سیستم بوجود می آید.

در نهایت به درجه آزادی ۳ سیستم نیروی واحد وارد می کنیم (شکل ۱-۴ت). بر اثر آن، تغییر مکان های f_{33}،f_{23}،f_{13} بوجود می آید.

در این حالت نیز چون اصل جمع آثار قوا برقرار است، می توان تغییر مکان ها و نیروهای سیستم های ب، پ و ت را در ضرایب مناسبی ضرب نموده و سپس، با یکدیگر جمع کرد تا تغییر مکان ها و نیروهای سیستم الف بدست آید. برای این منظور سیستم ب در نیروی $f_{S,1}$ سیستم پ در نیروی $f_{S,2}$ و سیستم ت در $f_{S,3}$ ضرب می کنیم. ملاحظه می شود که جمع نیروی این سه سیستم، نیروهای سیستم الف می شود. به همین ترتیب جمع تغییر مکان های سه سیستم تغییر مکان سیستم الف می شود. بنابراین:

$$u_1 = f_{11}f_{s1} + f_{12}f_{s2} + f_{13}f_{s3}$$

$$u_2 = f_{21}f_{s1} + f_{22}f_{s2} + f_{23}f_{s3} \qquad (۱۳-۱)$$

$$u_3 = f_{31}f_{s1} + f_{32}f_{s2} + f_{33}f_{s3}$$

این رابطه برای سیستم سه درجه آزاد بدست آمده است. بدیهی است برای سیستم N درجه آزاد این رابطه بصورت زیر در می آید:

$$u_1 = f_{11}f_{s1} + f_{12}f_{s2} + \cdots + f_{1N}f_{sN}$$

$$u_2 = f_{21}f_{s1} + f_{22}f_{s2} + \cdots + f_{2N}f_{sN}$$

$$\vdots \qquad (۱۴-۱)$$

$$u_3 = f_{31}f_{s1} + f_{32}f_{s2} + \cdots + f_{3N}f_{sN}$$

رابطهٔ (۱-۱۴) را می توان بصورت ماتریسی نوشت:

$$\{u\} = [f]\{f_s\} \qquad (۱۵-۱)$$

که در آن $\{u\}$ بردار تغییر مکان ها میباشد که همان رابطه (۱-۱۰) است. $\{f_s\}$ بردار نیروهای ارتجاعی می باشد که همان رابطه (۱-۵) است. $[f]$ ماتریس نرمی سیستم نامیده می شود که برابر است با:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \dots & f_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۱)$$

هریک از درایه های این ماتریس، ضرایب تأثیر نرمی نامیده می شوند. در اصل f_{ij} برابر است با تغییر مکان درجه آزادی i تحت اثر اعمال نیروی واحد در درجه آزادی j و نیروی صفر در سایر درجات آزادی. برای بدست آوردن ستون j ام ماتریس نرمی باید نیروی واحد به درجه آزادی j ام وارد کرد و تغییر مکان درجات آزادی مختلف را محاسبه نمود.

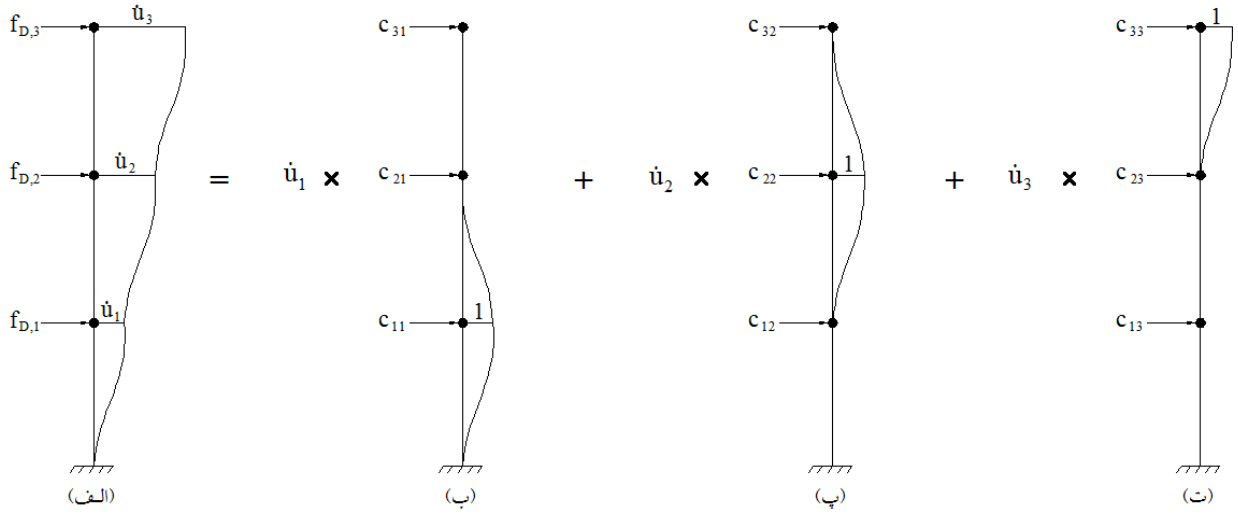
لازم به ذکر است که ماتریس نرمی نیز همان خواص ماتریس سختی را دارد.به علاوه با مقایسه روابط (۱-۱۲) و (۱-۱۵) می توان دریافت که ماتریس های سختی و نرمی معکوس یکدیگرند.

$$[k] = [f]^{-1} \qquad (۱۷-۱)$$

بنابراین روش دیگری برای محاسبهٔ ماتریس سختی این است که ماتریس نرمی محاسبه شده و سپس معکوس گردد.

۱-۴- بردار نیروهای میرایی

برای محاسبه بردار نیروهای میرایی نیز سیستم ۳ درجه آزاد برشی در نظر می گیریم که به درجات آزادی مختلف آن نیروهای f_{D1}،f_{D2}،f_{D3} وارد می شود. تحت اثر این نیروها، درجات آزادی مختلف، سرعت های $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ پیدا می کنند (شکل ۱-۵ الف).



شکل (۱-۵) محاسبهٔ بردار نیروهای میرایی

در شکل (۱-۵ ب) مقدار و جهت نیروهای c_{11}،c_{21}،c_{31} طوری هستند که در درجه آزادی ۱، سرعت واحد و در سایر درجات آزادی سرعت صفر بوجود می آید. در شکل (۱-۵ پ) مقدار و جهت نیروهای c_{12}،c_{22}،c_{32} طوری هستند که سرعت درجه آزادی ۲، واحد و سرعت سایر درجات آزادی صفر است. در شکل (۱-۵ ت) مقدار و

جهت نیروهای c_{33}،c_{23}،c_{13} طوری هستند که سرعت درجه آزادی ۳، واحد و سرعت سایر درجات آزادی صفر هستند.

در اینجا نیز نیروها و سرعت های سیستم های ب، پ و ت باید در ضرایب مناسبی ضرب شده و سپس با هم جمع شوند تا نیروها و سرعت های سیستم الف بدست آید. برای این منظور سیستم ب در $\dot{u}_1$ ، سیستم پ در $\dot{u}_2$ و سیستم ت در $\dot{u}_3$ ضرب شده و سپس نیروها و سرعت ها با هم جمع می شود. ملاحظه می شود که مجموع سرعت های سه سیستم ب، پ و ت با سیستم الف برابر است. به همین ترتیب مجموع نیروهای سه سیستم ب، پ و ت نیز باید با نیروهای سیستم الف برابر باشد. لذا:

$$\begin{aligned} f_{D1} &= c_{11}\dot{u}_1 + c_{12}\dot{u}_2 + c_{13}\dot{u}_3 \\ f_{D2} &= c_{21}\dot{u}_1 + c_{22}\dot{u}_2 + c_{23}\dot{u}_3 \\ f_{D3} &= c_{31}\dot{u}_1 + c_{32}\dot{u}_2 + c_{33}\dot{u}_3 \end{aligned} \tag{۱-۱۸}$$

این روابط برای سیستم ۳ درجه آزاد بدست آمده است. برای سیستم N درجه آزاد این روابط به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} f_{D1} &= c_{11}\dot{u}_1 + c_{12}\dot{u}_2 + \cdots + c_{1N}\dot{u}_N \\ f_{D2} &= c_{21}\dot{u}_1 + c_{22}\dot{u}_2 + \cdots + c_{2N}\dot{u}_N \\ &\vdots \\ f_{DN} &= c_{N1}\dot{u}_1 + c_{N2}\dot{u}_2 + \cdots + c_{NN}\dot{u}_N \end{aligned} \tag{۱-۱۹}$$

این روابط را به صورت ماتریس می توان نوشت:

$$\{f_D\} = [c]\,\{\dot{u}\} \tag{۱-۲۰}$$

که در آن $\{f_D\}$ بردار نیروهای میرایی می باشد که همان رابطه (۱-۴) است. $\{\dot{u}\}$ بردار سرعت درجات آزادی سیستم می باشد که برابر است با:

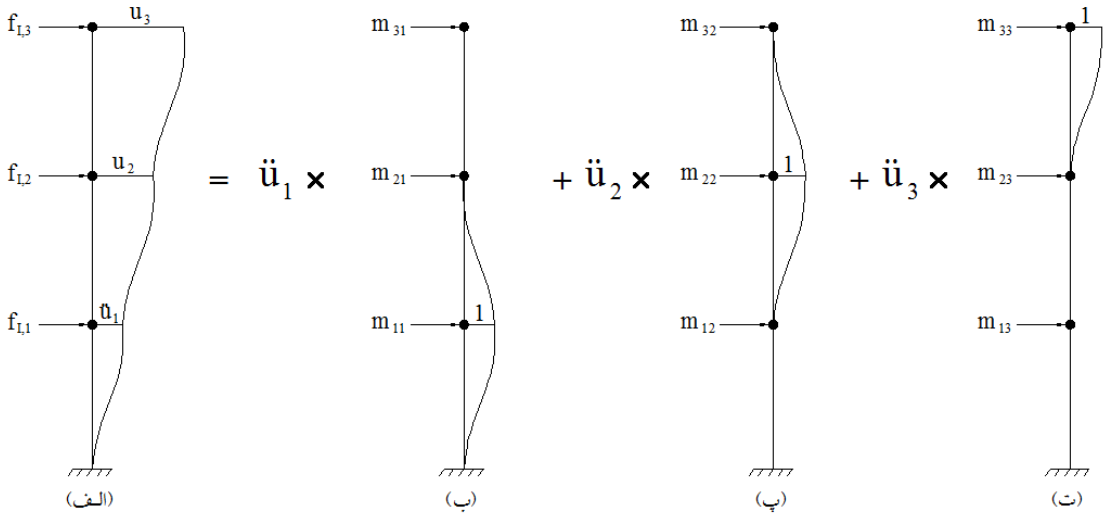
$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \qquad (۲۱-۱)$$

[c] ماتریس میرایی نامیده می شود و برابر است با:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} \cdots & c_{2N} \\ \vdots & & \\ c_{N1} & c_{N2} \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۲۲-۱)$$

۱-۵- بردار نیروهای اینرسی

برای محاسبه بردار نیرو های اینرسی نیز همان سیستم ۳ درجه آزاد را نظر می گیریم که به درجات آزادی مختلف آن نیرو $f_{I,1}$، $f_{I,2}$و $f_{I,3}$ وارد می شود . تخت اثر این نیرو ها ، هر یک از درجات آزادی شتاب های $\ddot{u}_1$، $\ddot{u}_2$ و $\ddot{u}_3$ پیدا می کنند .(شکل ۱-۶ الف).



شکل (۱-۶) محاسبهٔ بردار نیروهای اینرسی

در این مورد نیز به حالت اول (شکل ۱-۶ ب) نیرو های m_{11}، m_{21}و m_{31}را طوری وارد می کنیم که شتاب درجه آزادی ۱ ، برابر واحد و شتاب های درجات آزادی ۲و۳،صفر شود. در حالت دوم (شکل ۱-۶ پ) ، نیرو m_{12}، m_{22}و m_{32} را طوری وارد می کنیم که شتاب درجه آزادی ۲ برابر واحد و شتاب درجات آزادی ۲و۳ صفر

شوند. بالاخره در حالت سوم (شکل ۱-۶ ت)، نیرو های m_{13}، m_{23}و m_{33} را طوری وارد می کنیم که شتاب درجهٔ آزادی ۳ برابر واحد و شتاب سایر درجات آزادی صفر شود. در این مورد نیز از اصل جمع آثار قوا استفاده می شود. به این ترتیب که سیستم (ب) در $\ddot{u}_1$ ، سیستم (پ) در $\ddot{u}_2$ و سیستم (ت) در $\ddot{u}_3$ضرب می شود. ملاحظه می شود که شتاب سیستم (الف) برابر با جمع شتاب های سیستم های ب ، پ و ت می شوند . همچین جمع نیروهای سیستم (ب) ، (پ) و (ت) نیز باید با سیستم الف برابر باشند. پس:

$$\begin{aligned} f_{I,1} &= m_{11}\ddot{u}_1 + m_{12}\ddot{u}_2 + m_{13}\ddot{u}_3 \\ f_{I,2} &= m_{21}\ddot{u}_1 + m_{22}\ddot{u}_2 + m_{23}\ddot{u}_3 \\ f_{I,3} &= m_{31}\ddot{u}_1 + m_{32}\ddot{u}_2 + m_{33}\ddot{u}_3 \end{aligned} \qquad (۲۳-۱)$$

این روابط برای سیستم سه درجه آزاد بدست آمده است. برای سیستم N درجه آزاد این روابط به صورت زیر در می آید :

$$\begin{aligned} f_{I,1} &= m_{11}\ddot{u}_1 + m_{12}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{1N}\ddot{u}_N \\ f_{I,2} &= m_{21}\ddot{u}_1 + m_{22}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{2N}\ddot{u}_N \\ &\vdots \\ f_{I,N} &= m_{N1}\ddot{u}_1 + m_{N2}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{NN}\ddot{u}_N \end{aligned} \qquad (۲۴-۱)$$

این روابط را به صورت ماتریسی می توان نوشت:

$$\{f_I\} = [m]\{\ddot{u}\} \qquad (۲۵-۱)$$

که در آن $\{f_I\}$ بردار نیرو های اینرسی ، رابطه(۱-۳) ، $\{\ddot{u}\}$بردار شتاب درجات آزادی مختلف :

$$\{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \qquad (۲۶-۱)$$

و $[m]$ ماتریس جرم سیستم می باشد که عبارتست از :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۲۷-۱)$$

درایه های این ماتریس، ضرایب اینرسی نامیده می شوند. در واقع m_{ij} نیروی لازم در درجه آزادی i براثر اعمال شتاب واحد درجه آزادی j و شتاب صفر در سایر درجات آزادی است. برای بدست آوردن ستون j ام این ماتریس باید سیستم نیروها را طوری وارد کرد که شتاب درجه آزادی j ام برابر واحد شده و شتاب سایر درجات آزادی صفر شود.

لازم به ذکر است که اگر جرم سیستم در درجات آزاد متمرکز شده باشد، داریه های خارج از قطر صفر می شوند. این گونه ماتریس های جرم، متمرکز (Lumped Mass) نامیده می شوند. اگر جرم سیستم به صورت پیوسته باشد، درایه های خارج از قطر صفر نخواهد شد. به این نوع ماتریس ها، ماتریس های سازگار (Consistent Mass) گفته می شود.

۱-۶ معادله حرکت

با قرار دادن روابط (۱-۱۲)، (۱-۲۰) و (۱-۲۵) در رابطه (۱-۲) ، معادله حرکت سیستمهای چند درجه آزاد بدست می آید :

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{p(t)\} \qquad (۱-۲۸)$$

این معادله در واقع N معادله دیفرانسیل است که در هر معادله آن N مجهول وجود دارد. یاد می آوری می شود به چنین معادلاتی ، معادلات ممزوج یا درگیر (coupled) گفته می شود.

مجدداً یادآوری می شود که برشی بودن قاب هیچ محدودیتی در فرمولاسیون معادلهٔ حرکت بوجود نمی آورد. به عبارت دیگر معادلهٔ، حرکت سایر سیستم های دینامیکی نیز به همین صورت بدست می آید.

در فصل های آینده به حل این معادلات پرداخته می شود .

۱-۸ معادلهٔ حرکت سیستم های چند درجه آزاد تحت اثر شتاب پایه

یک قاب برشی N طبقه را در نظر بگیرید. فرض کنید پایهٔ این قاب تحت اثر حرکت زمین که تابعی از زمان است قرار گرفته باشد(شکل ۱-۶). تحت اثر این حرکت طبقات مختلف قاب نیز دارای حرکت خواهند بود. در

لحظهٔ دلخواه t پایهٔ قاب به اندازهٔ $u_g(t)$ نسبت به یک محور فرضی ثابت جابجا شده است. بر اثر این جابجایی طبقات قاب نیز جابجا می شوند. فرض کنید تغییرمکان نسبی طبقهٔ i ام نسبت به زمین $u_i(t)$ باشد، در این صورت تغییرمکان کل این درجهٔ آزادی برابر است با:

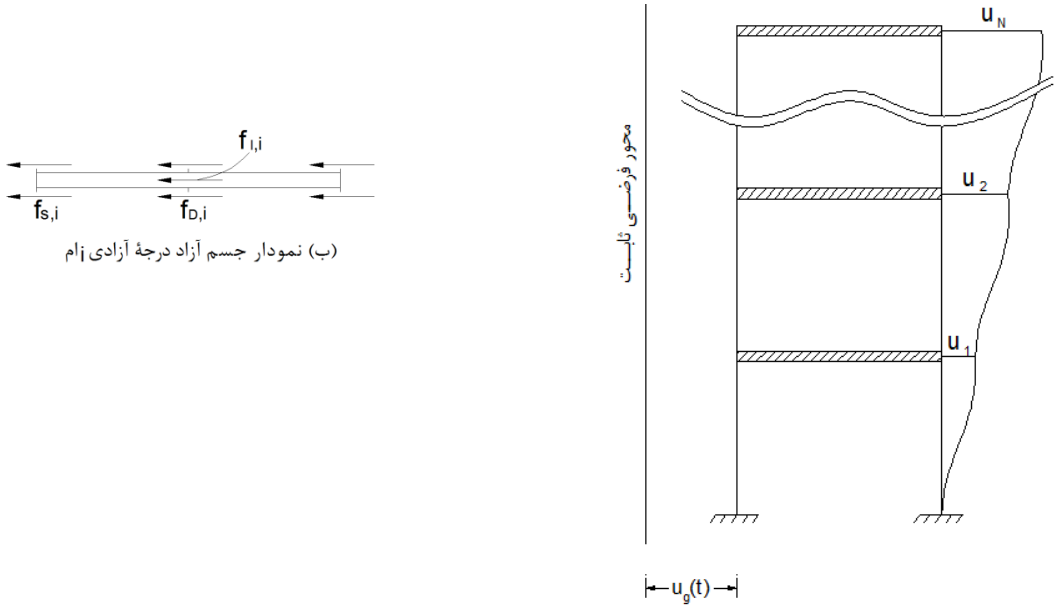
(۲۹-۱)

$$u_i^t(t) = u_i(t) + u_g(t)$$

که البته i می تواند بین ۱ تا N باشد. بنابراین شتاب مطلق طبقات برابر هستند با:

$$\ddot{u}_i^t(t) = \ddot{u}_i(t) + \ddot{u}_g(t) \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad (۳۰-۱)$$

نمودار جسم آزاد طبقهٔ i در شکل (۱-۶ ب) نشان داده شده است.



شکل (۱-۶) قاب برشی تحت اثر شتاب پایه

چنانچه ملاحظه می شود این نمودار شبیه به شکل (۱-۲ ب) است با این تفاوت که در اینجا نیروی خارجی وجود ندارد. بنابراین معادلهٔ تعادل قاب شبیه به معادلهٔ (۱-۲) می شود با این تفاوت که نیروی خارجی برابر صفر است.

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{0\} \qquad (۱-۳۱)$$

که در آن $\{0\}$ برداری با ابعاد $N\times1$ است که کلیهٔ درایه های آن صفر می باشد. $\{f_s\}$ و $\{f_D\}$ بردار نیروهای ارتجاعی و میرایی هستند که همان روابط (۱-۱۲) و (۱-۲۰) را دارند. لیکن نیروی اینرسی هر طبقه از حاصلضرب جرم طبقه در شتاب مطلق آن بدست می آید. بنابراین:

$$\begin{aligned} f_{I1} &= m_1\ddot{u}_1^t = m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_g) \\ f_{I2} &= m_2\ddot{u}_2^t = m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_g) \\ &\vdots \\ f_{IN} &= m_N\ddot{u}_N^t = m_N(\ddot{u}_N + \ddot{u}_g) \end{aligned} \qquad (۱-۳۲)$$

این رابطه را به صورت برداری زیر می توان نوشت:

$$\{f_I\} = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 + \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_2 + \ddot{u}_g \\ \dots \\ \ddot{u}_N + \ddot{u}_g \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \dots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_g \\ \dots \\ \ddot{u}_g \end{Bmatrix} \qquad (۱-۳۳)$$

و یا بطور خلاصه :

$$\{f_I\} = [m]\{\ddot{u}\} + [m]\{r\}\ddot{u}_g \qquad (۱-۳۴)$$

که در آن $[m]$ ماتریس جرم ، $\{\ddot{u}\}$ بردار شتاب های نسبی طبقات نسبت به زمین و $\ddot{u}_g$ شتاب زمین می باشد. $\{r\}$ برداری است که بردار تأثیر زلزله (Earthquake Influence Vector) نامیده می شود و برای قاب های برشی برابر است با:

$$\{r\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{Bmatrix} \qquad (۳۵-۱)$$

در واقع درایه های $\{r\}$ تغییرمکان درجات آزادی مختلف سازه بر اثر تغییرمکان پایهٔ سازه به اندازهٔ یک واحد در جهت زلزله و به صورت استاتیکی می باشد.

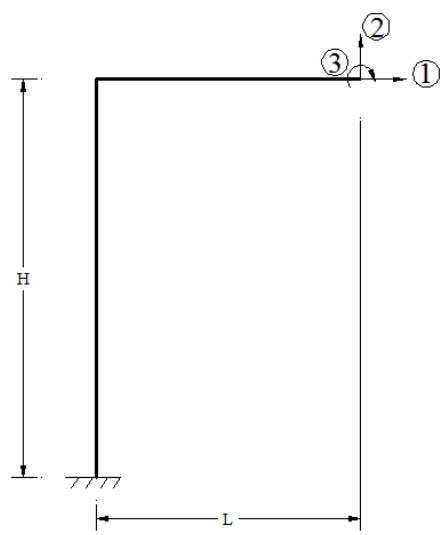
بنابراین معادلهٔ حرکت تحت اثر شتاب پایه برابر است با:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=-[m]\{r\}\ddot{u}_g(t) \qquad (۳۶-۱)$$

سمت راست این معادله را می توان نیروی مؤثر زلزله درنظر گرفت.

$$\{p_{eff}(t)\}=-[m]\{r\}\ddot{u}_g(t) \qquad (۳۷-۱)$$

مثال -



برای سازه نشان داده شده درجات آزادی مطابق شکل انتخاب شده اند. بردار تاثیر زلزله را در سه حالت زیر بدست آورید.

الف) زلزله به صورت افقی باشد.

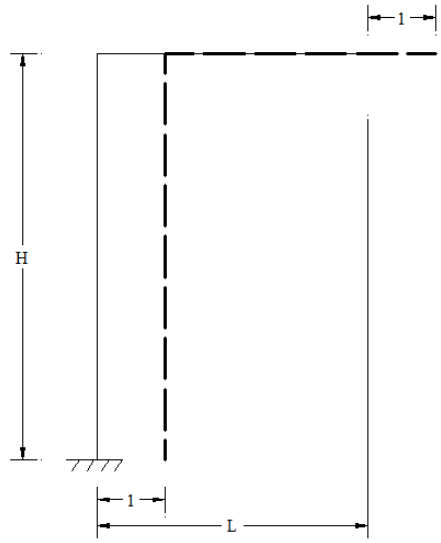
ب) زلزله به صورت عمودی باشد.

ج) زلزله به صورت دورانی باشد.

حل –

(الف)

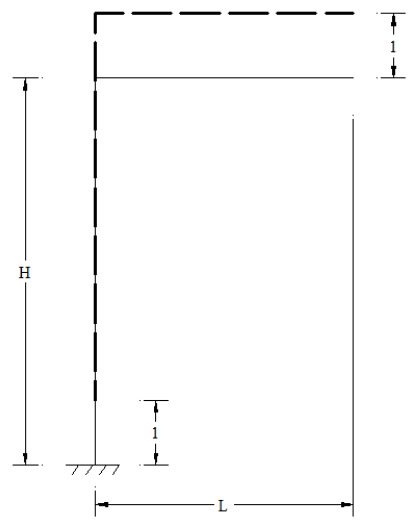
پایهٔ سازه را به اندازهٔ یک واحد در جهت افقی جابجا می کنیم.



$$u_g = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1 \ , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = 0$$

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

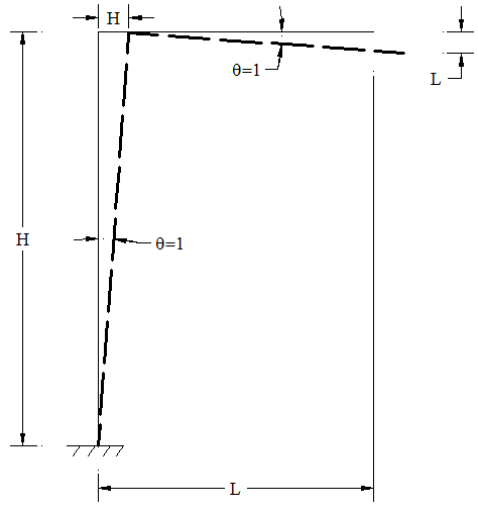
(ب) پایهٔ سازه را به اندازهٔ یک واحد در جهت قائم جابجا می کنیم.



$$u_g = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0 \ , \quad u_2 = 1 \quad , \quad u_3 = 0$$

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(پ) پایهٔ سازه را به اندازهٔ یک واحد دوران می دهیم.



$$\theta_g = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = H \ , \quad u_2 = -L \quad , \quad u_3 = 1$$

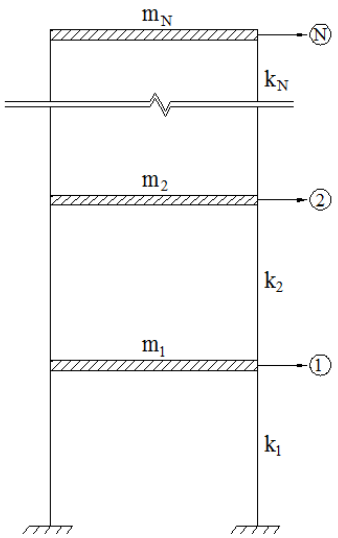
$$\{r\} = \begin{Bmatrix} H \\ -L \\ 1 \end{Bmatrix}$$

۱-۷- مثال هایی از ماتریس های سختی و جرم سیستم های دینامیکی

هر چند محاسبهٔ ماتریس سختی جزء اهداف این درس نیست لیکن چون سایر قسمت های این درس وابستگی زیادی به این ماتریس و ماتریس جرم دارند، در این قسمت روش محاسبهٔ این ماتریس ها برای سیستم های مقاوم جانبی متعارف تشریح خواهد شد.

۱-۷-۱ قاب های برشی

جرم طبقات قاب برشی N طبقهٔ نشان داده شده m_1 ، m_2 ، ... و m_N و سختی طبقات k_1 ، k_2 ، ... و k_N می باشد. می خواهیم ماتریس های سختی و جرم را بدست آوریم.



شکل (۱-۷) قاب برشی

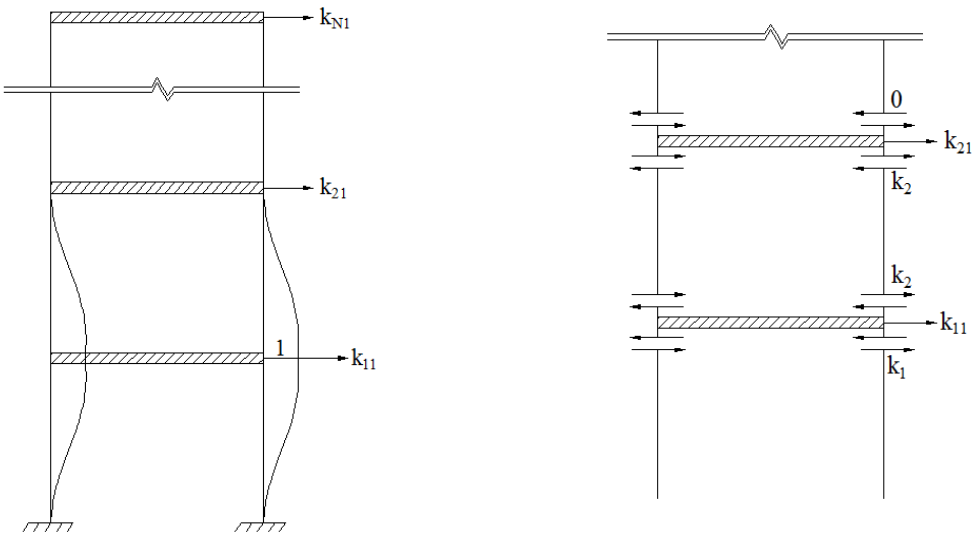
ماتریس جرم:

برای بدست آوردن ستون i ام ماتریس جرم باید به طبقهٔ i ، شتاب واحد و به سایر طبقات شتاب صفر داده شود. بر اساس قانون دوم نیوتن نیروی اینرسی طبقهٔ i ام برابر با جرم این طبقه و نیروی اینرسی سایر طبقات صفر می شود. بنابراین ماتریس جرم به صورت زیر در می آید:

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \qquad (۳۸-۱)$$

ماتریس سختی :

برای بدست آوردن ستون اول ماتریس سختی طبقهٔ اول را به اندازهٔ یک واحد جابجا کرده و سایر طبقات ثابت نگه داشته می شود. نیروهای لازم برای ایجاد چنین تغییرفرمی ستون اول ماتریس سختی را تشکیل می دهند.



شکل (۱-۸) محاسبهٔ ستون اول ماتریس سختی قاب برشی

با ترسیم نمودار جسم آزاد این طبقه معلوم می شود که :

$$k_{11}=k_1+k_2 \ , \quad k_{21}=-k_1 \ , \quad k_{31}=k_{41}=\cdots=k_{N1}=0 \qquad (۳۹-۱)$$

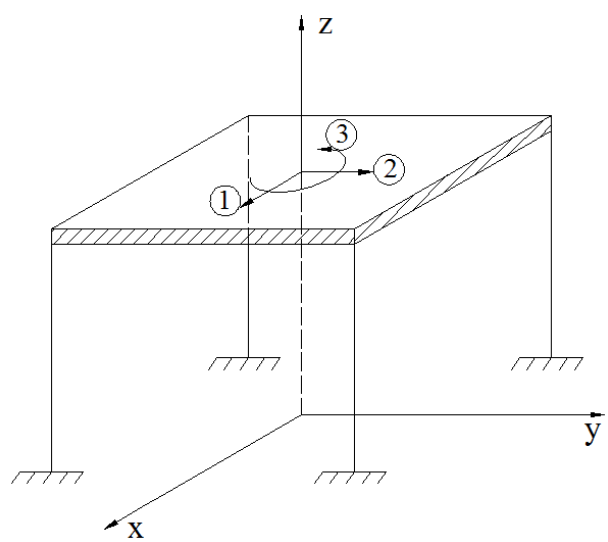
برای سایر طبقات نیز به همین ترتیب عمل می شود. در نتیجه ماتریس سختی به صورت زیر در می آید:

$$[k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_N \end{bmatrix} \qquad (۴۰-۱)$$

لازم به ذکر است که در روابط فوق k_i سختی طبقهٔ i است که برابر با مجموع سختی ستونهای آن طبقه می باشد. یادآوری می شود که سختی ستونی که دو انتهای آن در برابر دوران نگه داشته شده باشد برابر با $k=\frac{12EI}{L^3}$ است.

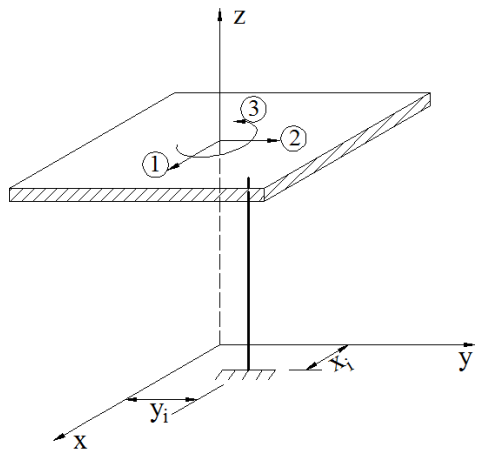
۱-۷-۲- قاب های پیچشی

شکل زیر یک قاب پیچشی یک طبقه را نشان می دهد که جرم آن m است. این قاب دو درجهٔ آزادی انتقالی و یک درجهٔ آزادی دورانی دارد. سختی ستون های این قاب متفاوت می باشند. حتی ممکن است در بعضی از دهانه های این قاب بادبند یا دیوار برشی وجود داشته باشد. همچنین ممکن است تعداد ستون های این قاب بیشتر یا کمتر از تعداد نشان داده شده باشد. می خواهیم ماتریس های جرم و سختی آن را بدست آوریم.



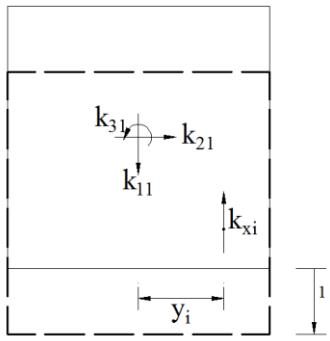
شکل (۱-۹) قاب پیچشی

برای اینکه به مسئله کلیت داده شود، فرض کنید یک سیستم مقاوم جانبی نمونه از این قاب در مختصات x_i و y_i قرار داشته باشد و دارای سختی k_{xi} در جهت x و k_{yi} در جهت y باشد. این سیستم می تواند یک ستون، بادبند یا دیوار برشی شود. تعداد این سیستم ها N فرض می شود.



شکل (۱-۱۰) سیستم مقاوم جانبی کلی در قاب های پیچشی

برای بدست آوردن ستون اول ماتریس سختی این سیستم یک واحد در جهت x جابجا می شود. واضح است تنها نیرویی که در سیستم مقاوم جانبی بوجود می آید k_{xi} در جهت x می باشد. نمودار جسم آزاد در این حالت در شکل (۱-۱۱) نشان داده شده است.



شکل (۱-۱۱) ستون اول ماتریس سختی قاب های پیچشی

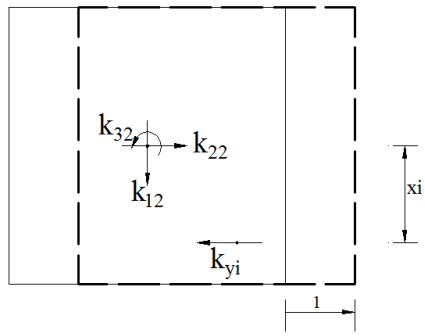
با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$k_{11} = \sum_{i=1}^{N} k_{xi}$$

$$k_{21} = 0 \qquad (۴۱-۱)$$

$$k_{31} = -\sum_{i=1}^{N} \left(k_{xi} \times y_i\right)$$

برای بدست آوردن ستون دوم ماتریس سختی این سیستم یک واحد در جهت y جابجا می شود. در این حالت تنها نیرویی که در سیستم مقاوم جانبی بوجود می آید k_{yi} در جهت y می باشد. نمودار جسم آزاد در این حالت در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۱-۱۲) ستون دوم ماتریس سختی قاب های پیچشی

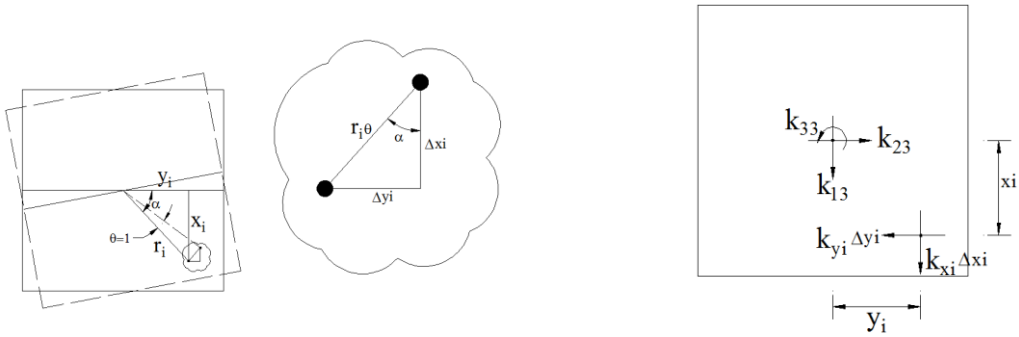
با نوشتن معادلات داریم:

$$k_{12} = 0$$

$$k_{22} = \sum_{i=1}^{N} k_{yi} \qquad (۴۲-۱)$$

$$k_{32} = \sum_{i=1}^{N} \left(k_{yi} \times x_i\right)$$

برای بدست آوردن ستون سوم ماتریس سختی قاب را به اندازهٔ یک واحد دوران می دهیم ($\theta=1$) . با توجه به شکل زیر مشخص است که نقطه ای که سیستم مقاوم جانبی به آن متصل است به اندازهٔ $r_i\theta\sin(\alpha)$ در امتداد x و به اندازهٔ $r_i\theta\cos(\alpha)$ در امتداد y جابجا می شود.



شکل (۱-۱۳) ستون سوم ماتریس سختی قاب های پیچشی

$$\cos(\alpha)=\frac{y_i}{r_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i = r_i\theta\cos(\alpha)=y_i \tag{۴۳-۱}$$

$$\sin(\alpha)=\frac{x_i}{r_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_i = r_i\theta\sin(\alpha)=x_i \tag{۴۴-۱}$$

$$k_{13}=-\sum_{i=1}^{N}k_{xi}\Delta x_i=-\sum_{i=1}^{N}k_{xi}y_i \tag{۴۵-۱}$$

$$k_{23}=\sum_{i=1}^{N}k_{yi}\Delta y_i=\sum_{i=1}^{N}k_{yi}x_i \tag{۴۶-۱}$$

$$k_{33}=\sum_{i=1}^{N}\left[\left(k_{yi}\Delta y_i\right)x_i+\left(k_{xi}\Delta x_i\right)y_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\left(k_{xi}y_i^2+k_{yi}x_i^2\right) \tag{۴۷-۱}$$

بنابراین ماتریس سختی به صورت زیر در می آید:

$$[k]=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}k_{xi} & 0 & -\sum_{i=1}^{N}k_{xi}y_i \\ 0 & \sum_{i=1}^{N}k_{yi} & \sum_{i=1}^{N}k_{yi}x_i \\ -\sum_{i=1}^{N}k_{xi}y_i & \sum_{i=1}^{N}k_{yi}x_i & \sum_{i=1}^{N}\left(k_{xi}y_i^2+k_{yi}x_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{۴۸-۱}$$

برای سادگی مجموع سختی های عناصر مقاوم جانبی در جهت x را k_x و در جهت y را k_y می نامیم. همچنین خروج از محوری در جهت x و جهت y به صورت زیر تعریف می شود.

$$e_y = \frac{\sum k_{xi} y_i}{\sum k_{xi}} = \frac{\sum k_{xi} y_i}{k_x} \qquad e_x = \frac{\sum k_{yi} x_i}{\sum k_{yi}} = \frac{\sum k_{yi} x_i}{k_y} \tag{۴۹-۱}$$

نقطه ای که مختصات آن e_x و e_y است مرکز سختی نامیده می شود.

K_{33} سختی پیچشی می باشد و با K_θ نشان داده می شود. در نتیجه ماتریس سختی قاب های پیچشی را به صورت زیر می توان نوشت:

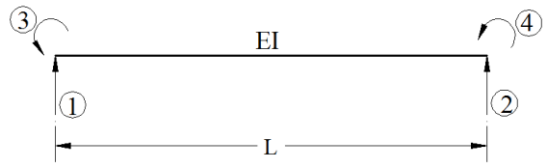
$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -e_y k_x \\ 0 & k_y & e_x k_y \\ -e_y k_x & e_x k_y & k_\theta \end{bmatrix} \tag{۵۰-۱}$$

برای بدست آوردن ستون اول ماتریس جرم، یک شتاب واحد در جهت x به طبقه داده می شود. تنها نیرویی که بوجود می آید $m_{11}=m$ است. به همین ترتیب برای بدست آوردن ستون دوم ماتریس جرم، یک شتاب واحد در جهت y به طبقه داده می شود. تنها نیرویی که بوجود می آید $m_{22}=m$ است. برای بدست آوردن ستون سوم ماتریس جرم یک شتاب زاویه ای واحد به طبقه داده می شود. در این حالت تنها نیرویی که بوجود می آید $m_{33}=I_o$ است. در نتیجه ماتریس جرم برابر است با:

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \tag{۵۱-۱}$$

۱-۷-۳- قاب های خمشی

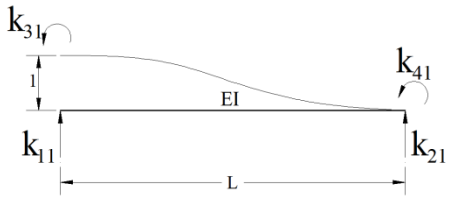
یک عضو خمشی با سختی خمشی EI و طول L در نظر بگیرید. با فرض اینکه درجات آزادی مطابق شکل باشند می خواهیم ماتریس سختی آن را بدست آوریم.



شکل (۱-۱۴) درجات آزادی یک عضو خمشی

روش اول – در این روش از تعریف ماتریس سختی استفاده می کنیم.

برای بدست آوردن ستون اول ماتریس سختی درجهٔ آزادی ۱ را یک واحد تغییرمکان داده و سایر درجات آزادی را ثابت نگه می داریم. با استفاده از روش شیب-افت داریم:

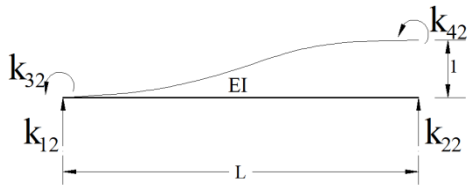


$$k_{31} = \frac{2EI}{L}\left(3\frac{1}{L}\right) = \frac{6EI}{L^2} = k_{41}$$

با استفاده از روابط تعادل داریم:

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} = -k_{21}$$

برای بدست آوردن ستون دوم ماتریس سختی درجهٔ آزادی ۲ را یک واحد تغییرمکان داده و سایر درجات آزادی را ثابت نگه می داریم. با استفاده از روش شیب-افت داریم:

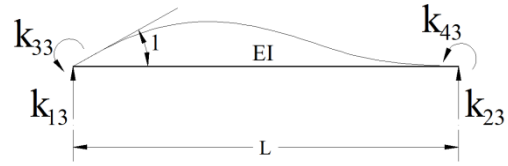


$$k_{32} = \frac{2EI}{L}\left(-3\frac{1}{L}\right) = \frac{-6EI}{L^2} = k_{42}$$

با استفاده از روابط تعادل داریم:

$$k_{12} = \frac{-12EI}{L^3} = -k_{22}$$

برای بدست آوردن ستون سوم ماتریس سختی درجهٔ آزادی ۳ را یک واحد دوران داده و سایر درجات آزادی را ثابت نگه می داریم. با استفاده از روش شیب-افت داریم:

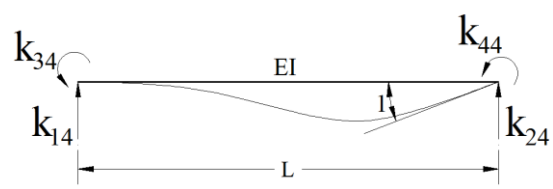


$$k_{33} = \frac{2EI}{L}(2) = \frac{4EI}{L} \qquad k_{43} = \frac{2EI}{L}$$

با استفاده از روابط تعادل داریم:

$$k_{13} = \frac{6EI}{L^2} = -k_{23}$$

برای بدست آوردن ستون چهارم ماتریس سختی درجهٔ آزادی ۴ را یک واحد دوران داده و سایر درجات آزادی را ثابت نگه می داریم. با استفاده از روش شیب-افت داریم:



$$k_{34} = \frac{2EI}{L}(1) = \frac{2EI}{L} \qquad k_{44} = \frac{2EI}{L}(2) = \frac{4EI}{L}$$

با استفاده از روابط تعادل داریم:

$$k_{14} = \frac{6EI}{L} = -k_{24}$$

در نتیجه ماتریس سختی برابر است با :

$$[k] = \frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

روش دوم – در این روش از تعریف توابع شکل استفاده می کنیم. فرض کنید یک تیر مستقیم به صورت زیر تغییر فرم پیدا کرده باشد. می خواهیم نمودار تغییرفرم تیر را برحسب تغییرمکان و شیب دو انتها بردست آوریم. تابع تغییر فرم تیر را به صورت یک چندجمله ای درجه ۴ می نویسیم:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$$

شرایط مرزی به صورت زیر اعمال می شود:

$$@x=0\ :\ u=u_1\ \Rightarrow\ a_0=u_1$$

$$@x=L\ :\ u=u_2\ \Rightarrow\ a_0+a_1L+a_2L^2+a_3L^3=u_2$$

$$@x=0\ :\ \frac{du}{dx}=\theta_1\ \Rightarrow\ a_1=\theta_1$$

$$@x=L\ :\ \frac{du}{dx}=\theta_2\ \Rightarrow\ a_1+2a_2L+3a_3L^2=\theta_2$$

از حل معادلات فوق داریم:

$$a_0=u_1$$

$$a_1L=\theta_1L$$

$$a_2L^2=-3u_1+3u_2-2\theta_1L-\theta_2L$$

$$a_3L^3=2u_1-2u_2+\theta_1L+\theta_2L$$

بنابراین تابع تغییرفرم تیر به صورت زیر می شود:

$$u=u_1+\theta_1x+\left(-3u_1+3u_2-2\theta_1L-\theta_2L\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(2u_1-2u_2+\theta_1L+\theta_2L\right)\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

اگر این رابطه را بر حسب تغییرمکان و شیب دو انتهای تیر مرتب کنیم، خواهیم داشت:

$$u=u_1[\psi_1(x)]+u_2[\psi_2(x)]+\theta_1[\psi_3(x)]+\theta_2[\psi_4(x)]$$

که در آن:

$$\psi_1(x)=1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_2(x)=3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_3(x)=L\left[\left(\frac{x}{L}\right)-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$\psi_4(x)=L\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

این توابع، توابع شکل (Shape function) نامیده می شوند.

درایه های ماتریس سختی عبارتند از:

$$K_{ij}=\int_0^L EI\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx$$

با توجه به اینکه:

$$\psi_1''(x)=-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\qquad \psi_2''(x)=6\frac{x}{L^2}-6\frac{x^2}{L^3}\qquad \psi_3''(x)=1-4\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2}\qquad \psi_4''(x)=-2\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2}$$

ضرایب ماتریس سختی برابرند با:

$$K_{11}=EI\int_0^L\psi_1''(x)\psi_1''(x)dx=EI\int_0^L\left(-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\right)^2dx=12\frac{EI}{L^3}$$

$$K_{12}=EI\int_0^L\psi_1''(x)\psi_2''(x)dx=EI\int_0^L\left(-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\right)\left(6\frac{x}{L^2}-6\frac{x^2}{L^3}\right)dx=-12\frac{EI}{L^3}$$

$$K_{13}=EI\int_0^L\psi_1''(x)\psi_3''(x)dx=EI\int_0^L\left(-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\right)\left(1-4\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2}\right)dx=6\frac{EI}{L^2}$$

$$K_{14}=EI\int_0^L\psi_1''(x)\psi_4''(x)dx=EI\int_0^L\left(-6\frac{x}{L^2}+6\frac{x^2}{L^3}\right)\left(-2\frac{x}{L}+3\frac{x^2}{L^2}\right)dx=6\frac{EI}{L^2}$$

$$K_{22}=EI\int_0^L\psi_2''(x)\psi_2''(x)dx=EI\int_0^L\left(6\frac{x}{L^2}-6\frac{x^2}{L^3}\right)^2dx=12\frac{EI}{L^3}$$

$$K_{23} = EI\int_0^L \psi_2''(x)\psi_3''(x)dx = EI\int_0^L \left(6\frac{x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3}\right)\left(1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)dx = -6\frac{EI}{L^2}$$

$$K_{24} = EI\int_0^L \psi_2''(x)\psi_4''(x)dx = EI\int_0^L \left(6\frac{x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3}\right)\left(-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)dx = -6\frac{EI}{L^2}$$

$$K_{33} = EI\int_0^L \psi_3''(x)\psi_3''(x)dx = EI\int_0^L \left(1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = 4\frac{EI}{L}$$

$$K_{34} = EI\int_0^L \psi_3''(x)\psi_4''(x)dx = EI\int_0^L \left(1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)\left(-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)dx = 2\frac{EI}{L}$$

$$K_{44} = EI\int_0^L \psi_4''(x)\psi_4''(x)dx = EI\int_0^L \left(-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = 4\frac{EI}{L}$$

بنابراین ماتریس سختی برابر است با:

$$[k] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & 6L \\ -12 & 12 & -6L & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & -6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

درایه های ماتریس جرم نیز از رابطهٔ زیر بدست می آیند:

$$m_{ij} = \int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$$

$$m_{11} = \overline{m}\int_0^L \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2 dx = \frac{13}{35}\overline{m}L$$

$$m_{12} = \overline{m}\int_0^L \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx = \frac{9}{70}\overline{m}L$$

$$m_{13} = \overline{m}L\int_0^L \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx = \frac{11}{210}\overline{m}L^2$$

$$m_{14}=\overline{m}L\int_0^L\left[1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx=\frac{-13}{420}\overline{m}L^2$$

$$m_{22}=\overline{m}\int_0^L\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2dx=\frac{13}{35}\overline{m}L$$

$$m_{23}=\overline{m}\int_0^L\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[\left(\frac{x}{L}\right)-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx=\frac{13}{420}\overline{m}L^2$$

$$m_{24}=\overline{m}\int_0^L\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx=\frac{11}{210}\overline{m}L^2$$

$$m_{33}=\overline{m}\int_0^L\left[\left(\frac{x}{L}\right)-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2dx=\frac{1}{105}\overline{m}L^3$$

$$m_{34}=\overline{m}\int_0^L\left[\left(\frac{x}{L}\right)-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx=\frac{-1}{140}\overline{m}L^3$$

$$m_{44}=\overline{m}\int_0^L\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2dx=\frac{1}{105}\overline{m}L^3$$

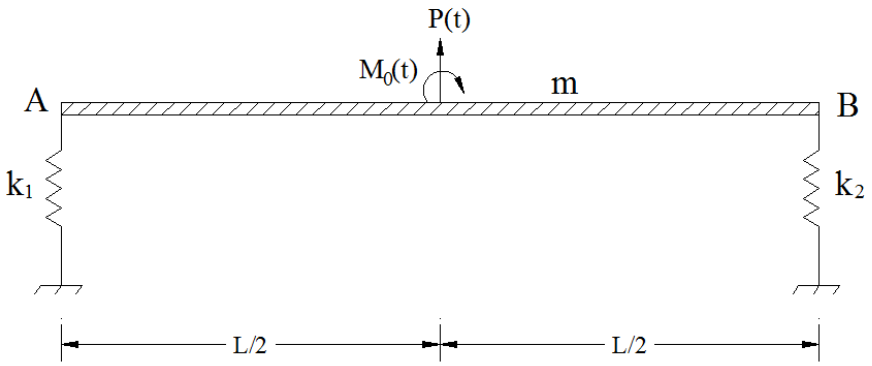
بنابراین ماتریس جرم به صورت زیر در می آید:

$$[m]=\frac{\overline{m}L}{420}\begin{bmatrix}156 & 54 & 22L & -13L\\ 54 & 156 & 13L & -22L\\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2\\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2\end{bmatrix}$$

چنانچه ملاحظه می شود این ماتریس قطری نیست. در واقع ماتریس جرم سیستم هایی که جرم آنها به صورت پیوسته باشد (در یک یا چند نقطه متمرکز نباشد) قطری نمی شود. به این ماتریس، ماتریس جرم سازگار (Consistent mass matrix) گفته می شود.

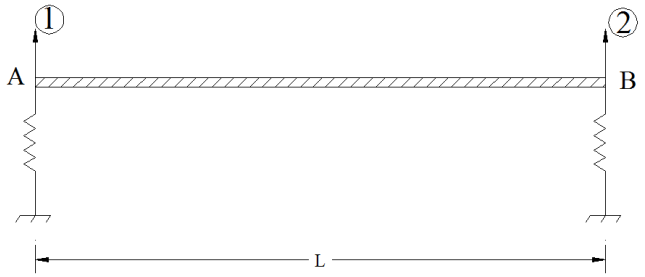
تمرینات

۱- یک میله صلب به جرم m روی دوفنربه سختی های k_1 , k_2 قرارگرفته و نیروی دینامیکی P(t) و لنگردینامیکی $M_0(t)$ دروسط به آن وارد می شود.

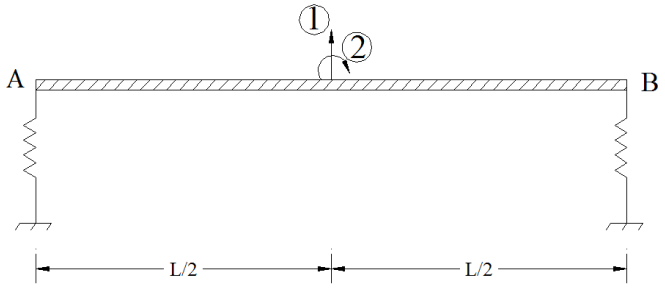


معادله حرکت این سیستم رادرحالتیکه درجات آزادی مطابق شکل های زیردرنظرگرفته شوند بدست آورید.

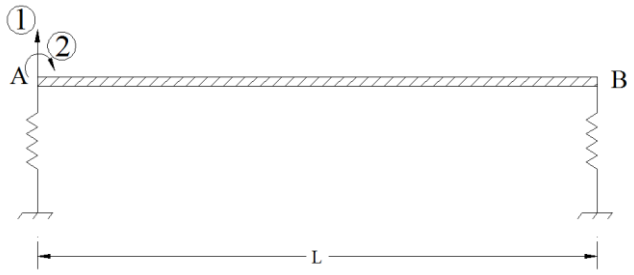
الف)



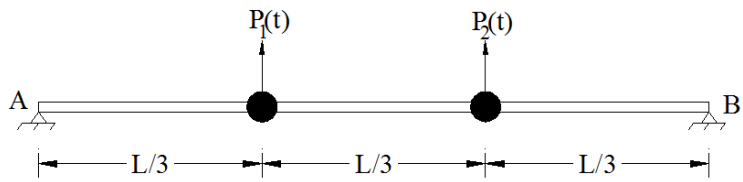
ب)



ج)



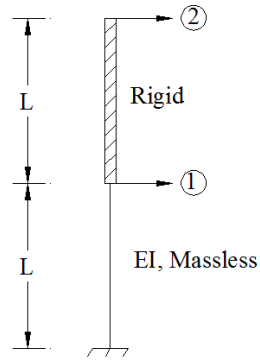
۲- یک تیریکنواخت دوسرساده به طول L سختی خمشی EI وجرم واحد طول $\overline{m}$ به صورت یک سیستم جرم متمرکزدرفاصله $\frac{1}{3}$ دهانه مدلسازی می شود. به این سیستم دو نیروی متمرکز $P_1(t)$ و $P_2(t)$ درفواصل $\frac{1}{3}$ دهانه وارد می شود. با درنظرگرفتن درجات آزادی در $\frac{1}{3}$ دهانه، معادلهٔ حرکت را بدست آورید.



جواب :

$$\frac{\overline{m}L}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+162.5\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}8 & -7\\ -7 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\end{Bmatrix}$$

۳-یک میله صلب به جرم واحد طول $\overline{m}$ روی یک ستون با سختی خمشی EI که بدون جرم می‌باشد، قرار گرفته است . ماتریس‌های جرم سازگار ، نرمی و سختی سیستم را با توجه به درجات آزادی نشان داده شده بدست آورید.



جواب:

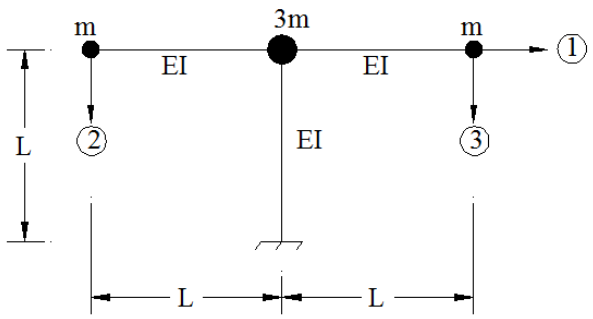
$$[m]=\frac{\overline{m}L}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$[k]=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}28 & -10\\ -10 & 4\end{bmatrix}$$

۴- یک سازه چتر گونه با سه عضو خمشی با سختی EI و سه جرم مدلسازی می‌شود.

الف- ماتریس‌های جرم و سختی این سیستم را بدست آورید.

ب-نیروی مؤثر وارد بر این سیستم را در دو حالت که شتاب زمین به صورت افقی و عمودی باشد بدست آورید.



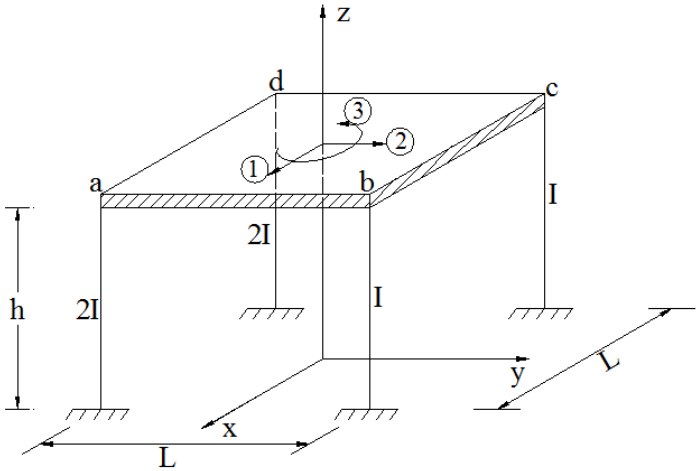
۵- شکل زیر یک قاب سه بعدی با سقف صلب وجرم واحد سطح γ نشان می دهد، معادله حرکت سیستم را در سه حالت زیر بدست آورید.

(الف) زلزله در جهت x

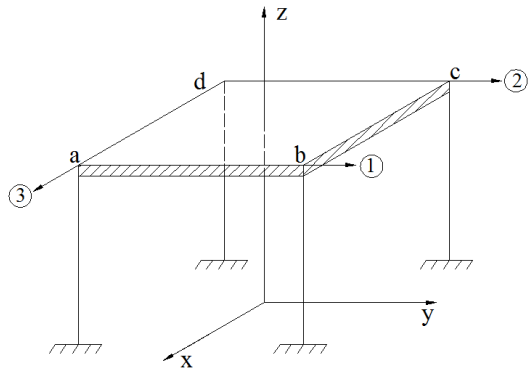
(ب) زلزله در جهت y

(ج) زلزله در جهت a-c

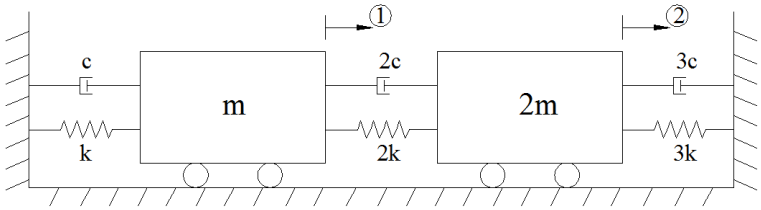
درجات آزادی را در مرکز جرم سقف مطابق شکل در نظر بگیرید.



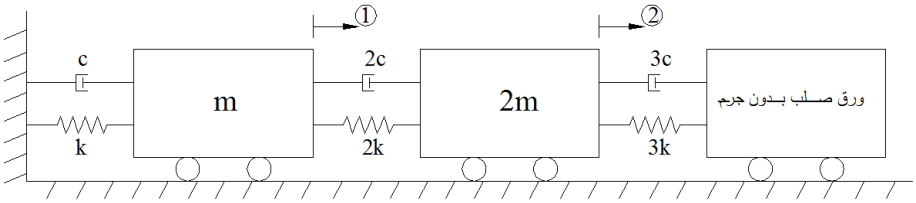
۶- مسئله قبل را با فرض اینکه درجات آزادی مطابق شکل زیر باشد حل کنید.



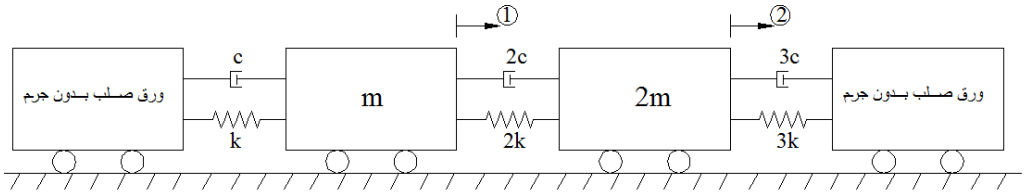
۷- معادله حرکت سیستم های نشان داده شده را بنویسید .



(الف)

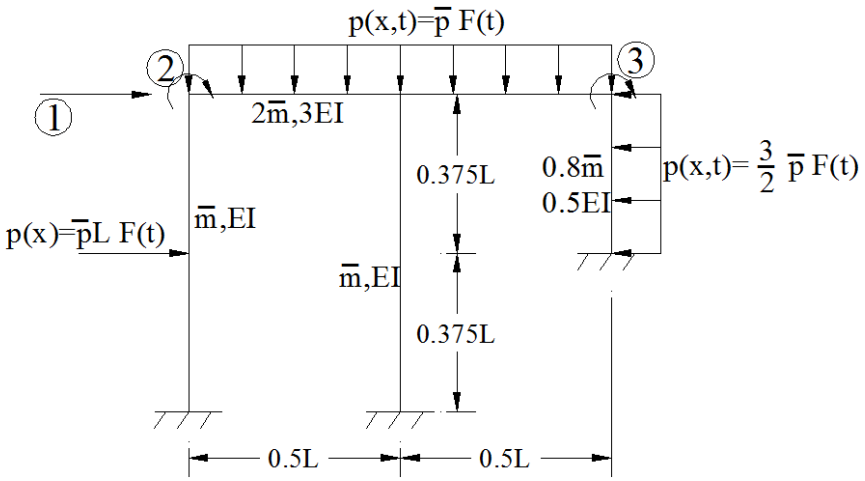


(ب)

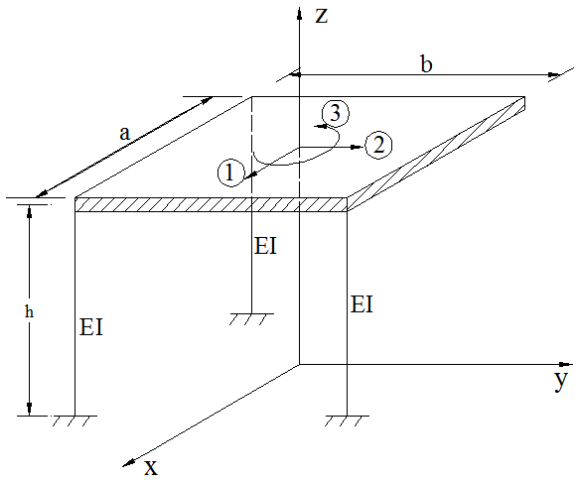
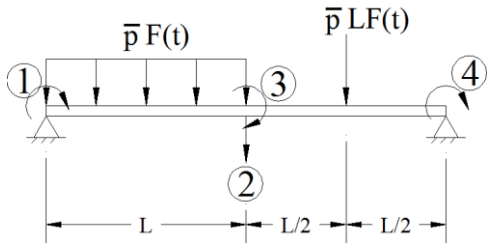


(ج)

۸- معادله حرکت سازه زیر را بر حسب درجات آزادی نشان داده شده و مشخصات مادی و هندسی سازه که روی شکل نشان داده شده اند بنویسید. در این شکل $\bar{p}$ شدت بار گسترده که ثابت است، EI سختی خمشی، $\bar{m}$ جرم واحد طول و F(t) تابع دلخواهی از زمان هستند.



۹ - سقف سیستم نشان داده شده صلب با جرم کل m می باشد. این سقف به وسیله سه ستون بدون جرم که هر کدام سختی خمشی EI (در همه جهات) دارند، نگهداری می شود. ماتریس های سختی و جرم این سیستم را بدست آورید.



۱۰– سیستم نشان داده شده دارای جرم واحد طول یکنواخت $\overline{m}$ و سختی خمشی ثابت EI می باشد. معادلهٔ حرکت آن را بر حسب درجات آزادی نشان داده شده بدست آورید.