فصل ۳

روش مختصات طبیعی

۳-۱ مقدمه

روش های مختلفی برای حل معادلهٔ حرکت وجود دارد. یکی از مهمترین این روش ها روش مختصات طبیعی است.

در این فصل معادلهٔ حرکت حل با استفاده از روش مختصات طبیعی حل می شود. در این روش تغییرمکان سازه بر حسب شکل مودها بسط داده شده و با استفاده از تعامد مودها ضرایب بسط بدست می آیند. به همین دلیل به این روش، روش جمع مودها نیر گفته می شود. همچنین در این فصل مراحل گام به گام تحلیل تاریخچهٔ زمانی سازه ها ارائه می شود.

۳-۲ روش مختصات طبیعی

در جبر خطی اثبات می شود که هر بردار در فضای N بعدی را می توان بر حسب بردارهای ویژهٔ آن فضا بسط داد.

مثال ۱- ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$[A]=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

در فصل قبل دیده شد که مقادیر و بردارهای ویژهٔ این ماتریس از رابطهٔ زیر بدست می آیند:

$$([A]-\lambda[I])\{x\}=\{0\}$$

این مقادیر و بردارها عبارتند از:

$$\lambda_1 = 1.0911 \qquad \{x_1\} = \begin{Bmatrix} 0.6907 \\ 0.6697 \\ -0.2729 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5.3605 \qquad \{x_2\} = \begin{Bmatrix} 0.5575 \\ -0.2528 \\ 0.7907 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 8.5484 \qquad \{x_3\} = \begin{Bmatrix} -0.4606 \\ 0.6983 \\ 0.5480 \end{Bmatrix}$$

هر بردار در فضای ۳ بعدی را می توان بر حسب این بردارها بسط داد. مثلاً بردار $\{b\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

این بردار را به صورت زیر می توان بسط داد :

$$\{b\} = \alpha_1\{x_1\} + \alpha_2\{x_2\} + \alpha_3\{x_3\}$$

که در آن α_1، α_2 و α_3 ضرایب بسط می باشند.

بردارهای ویژه بر هم عمودند، یعنی :

$$\{x_i\}^T\{x_j\} = 0 \quad , i \neq j$$

بنابراین برای بدست آوردن هر یک از ضرایب α کافیست معادلهٔ فوق در بردار ویژهٔ مربوطه ضرب شود.

$$\{x_1\}^T\{b\} = \alpha_1\{x_1\}^T\{x_1\} \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \frac{\{x_1\}^T\{b\}}{\{x_1\}^T\{x_1\}} = \frac{1.2325}{1.0} = 1.2325$$

$$\{x_2\}^T\{b\} = \alpha_2\{x_2\}^T\{x_2\} \;\Rightarrow\; \alpha_2 = \frac{\{x_2\}^T\{b\}}{\{x_2\}^T\{x_2\}} = \frac{3.2344}{1.0} = 3.2344$$

$$\{x_3\}^T\{b\} = \alpha_3\{x_3\}^T\{x_3\} \;\Rightarrow\; \alpha_3 = \frac{\{x_3\}^T\{b\}}{\{x_3\}^T\{x_3\}} = \frac{1.4212}{1.0} = 1.4212$$

ملاحظه می شود که :

$$\alpha_1\{x_1\}+\alpha_2\{x_2\}+\alpha_3\{x_3\}=1.2325\times\begin{Bmatrix}0.6907\\0.6697\\-0.2729\end{Bmatrix}+3.2344\times\begin{Bmatrix}0.5575\\-0.2528\\0.7907\end{Bmatrix}+1.4212\times\begin{Bmatrix}-0.4606\\0.6983\\0.5480\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\1\\3\end{Bmatrix}$$

مثال ۲- بسط دادن بردارها بر حسب بردارهای ویژه در مورد مسائل مقدار ویژهٔ غیراستاندارد نیز صدق می کند. به عنوان مثال ماتریس های زیر را درنظر بگیرید:

$$[k]=\begin{bmatrix}12&-5&0\\-5&8&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\qquad [m]=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

با حل معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس ها، شکل های مود به صورت زیر بدست می آید:

$$[k]\{\varphi\}=\omega^2[m]\{\varphi\}\quad\Rightarrow$$

$$\omega_1^2=0.2685\qquad\{\varphi_1\}=\begin{Bmatrix}-0.4414\\0.1847\\-0.0732\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2^2=1.5418\qquad\{\varphi_2\}=\begin{Bmatrix}0.1958\\0.2285\\-0.4217\end{Bmatrix}$$

$$\omega_3^2=3.5230\qquad\{\varphi_3\}=\begin{Bmatrix}-0.1297\\-0.2835\\-0.3875\end{Bmatrix}$$

حال می توان هر بردار ۳ بعدی را برحسب این بردارها بسط داد. به عنوان مثال بردار زیر را درنظر بگیرید:

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}2\\1\\3\end{Bmatrix}$$

این بردار را به صورت زیر می توان بسط داد :

$$\{u\} = y_1\{\varphi_1\} + y_2\{\varphi_2\} + y_3\{\varphi_3\}$$

که در آن y_1، y_2 و y_3 ضرایب بسط می باشند. با توجه به قضایای تعامد مودها این ضرایب از ضرب این رابطه در $\{\varphi_i\}^T[m]$ بدست می آیند:

$$\{\varphi_1\}^T[m]\{u\} = y_1\{\varphi_1\}^T[m]\{\varphi_1\} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\{\varphi_1\}^T[m]\{u\}}{\{\varphi_1\}^T[m]\{\varphi_1\}} = -3.0817$$

$$\{\varphi_2\}^T[m]\{u\} = y_2\{\varphi_2\}^T[m]\{\varphi_2\} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{\{\varphi_2\}^T[m]\{u\}}{\{\varphi_2\}^T[m]\{\varphi_2\}} = -0.8575$$

$$\{\varphi_3\}^T[m]\{u\} = y_3\{\varphi_3\}^T[m]\{\varphi_3\} \quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{\{\varphi_3\}^T[m]\{u\}}{\{\varphi_3\}^T[m]\{\varphi_3\}} = -6.2264$$

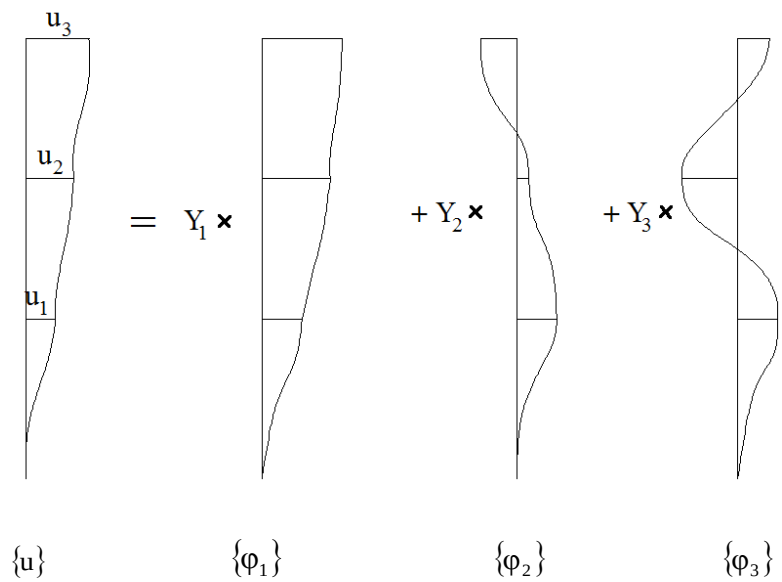
ملاحظه می شود که:

$$y_1\{\varphi_1\} + y_2\{\varphi_2\} + y_3\{\varphi_3\} = -3.0817\begin{Bmatrix} -0.4414 \\ 0.1847 \\ -0.0732 \end{Bmatrix} - 0.8575\begin{Bmatrix} 0.1958 \\ 0.2285 \\ -0.4217 \end{Bmatrix} - 6.2264\begin{Bmatrix} -0.1297 \\ -0.2835 \\ -0.3875 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

مثال های فوق نشان می دهد که هر بردار دلخواه را می توان بر حسب بردارهای ویژه بسط داد. بنابراین بردار تغییرمکان های سازه را نیز می توان بر حسب شکل مودها بسط داد:

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i(t) \qquad (۱-۳)$$

که در آن $Y_i(t)$ ضرایب بسط می باشند. به این ضرایب مختصات طبیعی (Normal coordinate) گفته می شود. در حالیکه $u(t)$ مختصات فیزیکی (Physical coordinate) نامیده می شود. در واقع هر یک از اشکال مودی در ضریب مناسبی ضرب شده و سپس با یکدیگر جمع می شوند تا بردار تغییرمکان های سازه بدست آید(شکل ۳-۱). به همین دلیل بعضی اوقات به این روش، روش جمع مودها (Mode superposition) نیز گفته می شود.



شکل ۳-۱ روش مختصات طبیعی

به این ترتیب مجهول $\{u\}$ به کمک شکل مودها به مجهول مودی Y_j مرتبط می شود. رابطهٔ (۳-۱) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \{u\} = [\Phi]\{Y\} \qquad (۳-۲)$$

بنابراین تغییرمکان درجهٔ آزادی i برابر است با:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij} Y_j(t) \qquad (۳-۳)$$

مشتقات رابطهٔ (۳-۱) عبارتند از:

$$\{\dot{u}(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}\dot{Y}_i(t) \qquad \{\ddot{u}(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}\ddot{Y}_i(t) \tag{۴-۳}$$

این روابط و رابطهٔ (۳-۱) در معادلهٔ حرکت قرار داده می شود:

$$[m]\left(\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}\ddot{Y}_i\right)+[c]\left(\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}\dot{Y}_i\right)+[k]\left(\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i\right)=\{p(t)\} \tag{۵-۳}$$

این رابطه در $\{\varphi_j\}^T$ ضرب شده و پس از استفاده از قضیهٔ تعامد مودها رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$M_j\ddot{Y}_j(t)+C_j\dot{Y}_j(t)+K_jY_j(t)=P_j(t) \qquad j=1,2,\cdots,N \tag{۶-۳}$$

که در آن M_j، C_j و K_j به ترتیب جرم مودی، میرایی مودی و سختی مودی jام می باشند که در روابط(۲-۲۴) تا (۲-۲۶) تعریف شده اند. همچنین $P_j(t)$ نیروی مودی نامیده می شود و برابر است با:

$$P_j(t)=\{\varphi_j\}^T\{p(t)\} \tag{۷-۳}$$

معادلهٔ (۳-۶) یک معادلهٔ دیفرانسیل شبیه به معادلهٔ حرکت سیستم یکدرجه آزاد با جرم M_j، میرایی C_j ، سختی K_j و نیروی $P_j(t)$ می باشد. می توان گفت که با استفاده از روش مختصات طبیعی دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل N مجهولی به N معادلهٔ دیفرانسیل یک مجهولی تبدیل می شود. به عبارت دیگر سیستم N درجه آزاد به N سیستم یک درجه آزاد تبدیل می شود. این معادله را برای کلیهٔ مودها می توان حل کرد و $Y_j(t)$ را بدست آورد. سپس با قرار دادن آن در رابطهٔ (۳-۱) یا (۳-۳) تغییرمکان سازه را بدست آورد. حل این معادله به نیروی وارد به سازه بستگی دارد. در حالت کلی می توان از انتگرال دوهامل برای حل آن استفاده نمود. لیکن اگر بار وارد بر سازه عددی باشد باید از روش های عددی مثل جنینگز و یا نیومارک استفاده نمود.

نکتهٔ مهم در رابطه با روش مختصات طبیعی این است که رابطهٔ (۳-۱) وقتی دقیق است که کلیهٔ مودها در نظر گرفته شود. بنابراین اگر بجای کلیهٔ مودها، تعداد محدودی مود درنظر گرفته شود مقداری خطا وارد محاسبات می شود. لیکن برای سازه های منظم و معمولی می توان نشان داد که هر چه شمارهٔ مود بالاتر رود تأثیر آن درپاسخ سازه کمتر می شود. بنابراین می توان بجای کلیهٔ مودها تعداد محدودی از آنها را در تحلیل در نظر گرفت.

۳-۳ شرایط اولیه

چنانچه قبلاً گفته شد، ارتعاش آزاد بوسیلهٔ تغییرمکان و یا سرعت اولیه که شرایط اولیه نامیده می شود، بوجود می آید. این شرایط بر اساس مختصات فیزیکی $\{u_0\}$ و $\{\dot{u}_0\}$ بیان می شود در حالیکه رابطهٔ (۳-۶) بر اساس مختصات طبیعی می باشد. برای تبدیل شرایط اولیه از مختصات فیزیکی به مختصات طبیعی رابطهٔ (۳-۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\{u_0\} = \sum_{i=1}^{N} \{\varphi_i\} Y_{0i} \qquad (۳-۸)$$

با ضرب این رابطه در $\{\varphi_j\}^T[m]$ و استفاده از تعامد مودها خواهیم داشت:

$$\{\varphi_j\}^T[m]\{u_0\} = \{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\}Y_{0j} \quad \Rightarrow \quad Y_{0j} = \frac{\{\varphi_j\}^T[m]\{u_0\}}{\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\}} \qquad (۳-۹)$$

همچنین سرعت اولیه در مختصات طبیعی بر حسب مختصات فیزیکی از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\{\varphi_j\}^T[m]\{\dot{u}_0\} = \{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\}\dot{Y}_{0j} \quad \Rightarrow \quad \dot{Y}_{0j} = \frac{\{\varphi_j\}^T[m]\{\dot{u}_0\}}{\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\}} \qquad (۳-۱۰)$$

۳-٤ شتاب زلزله

معادلهٔ حرکت تحت اثر شتاب زلزله به صورت زیر بدست آمد:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = -[m]\{r\}\ddot{u}_g(t) \qquad (۳-۱۱)$$

مجدداً $\{u\}$ را به صورت رابطهٔ (۳-۱) درنظر گرفته و در این رابطه جایگزین کرده سپس طرفین رابطهٔ بدست آمده را در $\{\varphi_j\}^T$ ضرب کرده و از تعامد مودها استفاده می شود. در نتیجه رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$M_j\ddot{Y}_j(t) + C_j\dot{Y}_j(t) + K_jY_j(t) = -L_j\ddot{u}_g(t) \qquad j = 1,2,\cdots,N \qquad (۳-۱۲)$$

که در آن L_j ضریب تحریک مودی زلزله (Earthquake modal excitation factor) نامیده می شود و برابر است با:

$$L_j = \{\varphi_j\}^T [m]\{r\} \tag{۱۳-۳}$$

برای حل معادلهٔ (۳-۱۲) آن را بر M_j تقسیم می کنیم.

$$\ddot{Y}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j(t) + \omega_j^2 Y_j(t) = -\gamma_j\ddot{u}_g(t) \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{۱۴-۳}$$

در این معادله γ_j ضریب مشارکت مودی (Modal participation factor) نامیده می شود و برابر است با:

$$\gamma_j = \frac{L_j}{M_j} = \frac{\{\varphi_j\}^T [m]\{r\}}{\{\varphi_j\}^T [m]\{\varphi_j\}} \tag{۱۵-۳}$$

در اینجا دو قضیهٔ مهم در رابطه با ضرایب تحریک مودی و مشارکت مودی بیان می شود.

قضیهٔ ۱- اگر $M_{tot.}$ جرم کل یک قاب برشی باشد، آنگاه $\sum_{j=1}^{N}\frac{L_j^2}{M_j} = M_{tot.}$.

قضیهٔ ۲- اگر بردارهای شکل مود نسبت به یکی از سطرها همپایه شده باشد آنگاه : $\sum_{j=1}^{N}\gamma_j = 1.0$

اثبات این دو قضیه در پیوست آمده است.

۳-۵ نیروی وارد بر سازه

نیروی وارد بر سازه از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\{f_s(t)\} = [k]\{u\} = [k]\left(\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left([k]\{\varphi_i\}Y_i\right) \tag{۱۶-۳}$$

ولی چون محاسبهٔ ماتریس سختی مشکل تر از ماتریس جرم است ، بهتر است نیروی وارد بر سازه بر حسب جرم نوشته شود. برای این منظور بجای $[k]\{\varphi_i\}$ با استفاده از معادلهٔ مشخصه، $\omega_i^2[m]\{\varphi_i\}$ قرار داده می شود.

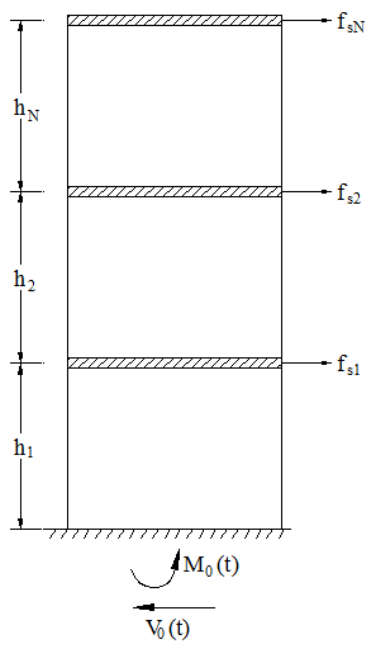
$$\{f_s(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\left(\omega_i^2[m]\{\varphi_i\}Y_i\right)=[m]\sum_{i=1}^{N}\left(\omega_i^2\{\varphi_i\}Y_i\right) \qquad (۱۷-۳)$$

با بسط این رابطه، نیروی وارد بر درجهٔ آزادی دلخواه n به صورت زیر بدست می آید:

$$f_{sn}(t)=m_n\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\varphi_{ni}Y_i(t) \qquad (۱۸-۳)$$

۳-۵ برش پایه

برای یک قاب برشی نیروی برش پایه برابر با جمع نیروهای وارد بر درجات آزادی مختلف است(شکل ۳-۲).



شکل ۳-۲ محاسبهٔ نیروی برش پایه و لنگر واژگونی برای قاب های برشی

پس:

$$V_b(t)=\sum_{n=1}^{N} f_{sn}(t)=\sum_{n=1}^{N}\left(m_n\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\varphi_{ni}Y_i(t)\right) \qquad (۱۹-۳)$$

گستردهٔ این رابطه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}V_b(t)&=\omega_1^2Y_1(t)(m_1\varphi_{11}+m_2\varphi_{21}+\cdots+m_N\varphi_{N1})+\omega_2^2Y_2(t)(m_1\varphi_{12}+m_2\varphi_{22}+\cdots+m_N\varphi_{N2})\\&+\cdots+\omega_N^2Y_N(t)(m_1\varphi_{1N}+m_2\varphi_{2N}+\cdots+m_N\varphi_{NN})\end{aligned} \qquad (۲۰-۳)$$

با توجه به اینکه :

$$L_j=\{\varphi_j\}^T[m]\{1\}=m_1\varphi_{j1}+m_2\varphi_{j2}+\cdots+m_N\varphi_{jN} \qquad (۲۱-۳)$$

پس :

$$V_b(t)=\omega_1^2Y_1(t)L_1+\omega_2^2Y_2(t)L_2+\cdots+\omega_N^2Y_N(t)L_N \qquad (۲۲-۳)$$

و یا :

$$V_b(t)=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2L_iY_i(t) \qquad (۲۳-۳)$$

۳-٦ لنگر واژگونی

لنگر واژگونی برای یک قاب برشی از حاصلضرب نیروی هر طبقه در ارتفاع آن طبقه از تکیه گاه بدست می آید(شکل ۳-۲).

$$M_b(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i f_{si}(t) \qquad (۲۴-۳)$$

۳-۷ مراحل گام به گام محاسبهٔ تاریخچهٔ زمانی پاسخ سیستم های چند درجه آزاد

۱- ماتریس های جرم $[m]$ و سختی $[k]$ محاسبه شود.

۲- معادلهٔ مشخصه حل شده و فرکانس ها و شکل مودهای ارتعاشی بدست آیند.

$$([k]-\omega^2[m])\{\varphi\}=\{0\} \;\Rightarrow\; \omega_i,\{\varphi_i\} \quad i=1,2,\cdots,N$$

۳- جرم مودی محاسبه گردد.

$$M_i=\{\varphi_i\}^T[m]\{\varphi_i\} \quad i=1,2,\cdots,N$$

اگر نیروی خارجی به سیستم وارد شود، نیروی مودی محاسبه گردد:

$$P_i(t)=\{\varphi_i\}^T\{p(t)\}$$

اگر شتاب زلزله وارد شده باشد، ضرایب تحریک مودی و مشارکت مودی محاسبه شود:

$$L_i=\{\varphi_i\}^T[m]\{r\} \quad , \quad \gamma_i=\frac{L_i}{M_i} \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

۴- معادلهٔ دیفرانسیل مودال برای کلیهٔ مودها حل شده و مختصات طبیعی بدست آیند.

(الف) اگر نیروی خارجی به سیستم وارد شده باشد، معادلهٔ دیفرانسیل مودی به صورت زیر است:

$$\ddot{Y}_i+2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i+\omega_i^2Y_i=\frac{P_i(t)}{M_i} \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل را می توان با یکی از روش های دینامیک سازه ها بدست آورد. از جمله می توان از انتگرال دوهامل استفاده کرد:

$$Y_i(t)=\frac{1}{M_i\omega_{Di}}\int_0^t P_i(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

(ب) اگر سیستم تحت اثر ارتعاش آزاد باشد، پاسخ آن از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$Y_i(t)=e^{-\xi_i\omega_i t}\left[\frac{\dot{Y}_{i0}+Y_{i0}\xi_i\omega_i}{\omega_{Di}}\sin(\omega_{Di}t)+Y_{i0}\cos(\omega_{Di}t)\right] \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

که در آن : $Y_{i0}=\frac{\{\varphi_i\}^T[m]\{u_0\}}{M_i} \quad , \quad \dot{Y}_{i0}=\frac{\{\varphi_i\}^T[m]\{\dot{u}_0\}}{M_i}$

(پ) اگر سیستم تحت اثر شتاب زلزله باشد، معادلهٔ دیفرانسیل مودی به صورت زیر است:

$$\ddot{Y}_i+2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i+\omega_i^2Y_i=-\gamma_i\ddot{u}_g(t) \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل را می توان با یکی از روش های عددی بدست آورد.

۵- تغییرمکان درجات آزادی مختلف از رابطهٔ زیر محاسبه شود:

$$\{u(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i(t)$$

مثلاً تغییرمکان درجهٔ آزادی n برابر است با:

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ni}Y_i(t)$$

۶- نیروی وارد بر درجات آزادی مختلف از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\{f_s(t)\}=[k]\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i(t)$$

بجای این رابطه می توان از رابطهٔ زیر نیز نیروی وارد بر درجات آزادی مختلف را بدست آورد.

$$\{f_s(t)\}=[m]\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\{\varphi_i\}Y_i(t)$$

مثلاً نیروی وارد بر درجهٔ آزادی n برابر است با:

$$f_{sn}(t)=m_n\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ni}\omega_i^2Y_i(t)$$

۷- نیروی برش پایه از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$V_b(t)=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2 L_i Y_i(t)$$

مثال ۳ – سازهٔ مثال بخش ۲-۲ را درنظر بگیرید. فرض کنید این سازه تحت اثر شرایط اولیهٔ زیر قرار گرفته باشد:

$$\{u_0\}=\begin{Bmatrix}3\\2\\1\end{Bmatrix}\text{cm} \quad , \quad \{\dot{u}_0\}=\begin{Bmatrix}25\\20\\15\end{Bmatrix}\text{cm/sec}$$

سازه را بدون میرایی درنظر گرفته و تغییرمکان و نیروی درجات آزادی مختلف و همچنین برش پایه را بدست آورید.

حل - از مثال مذکور ماتریس شکل مودها به صورت زیر بدست آمده بود

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1.6681 & 0.2986 & -1.4028\\ 2.0074 & -0.8706 & 0.7788\end{bmatrix}$$

همچنین جرم های مودی به صورت زیر محاسبه شده بود:

$$M_1=506.5582\,\text{ton} \qquad M_2=121.7210\,\text{ton} \qquad M_3=244.1348\,\text{ton}$$

بنابراین تغییرمکان ها و سرعت های مودی اولیه برابرند با:

$$Y_{1,0}=\frac{\{\varphi_1\}^T[m]\{u_0\}}{M_1}=1.1134 \qquad Y_{2,0}=\frac{\{\varphi_2\}^T[m]\{u_0\}}{M_2}=1.6395 \qquad Y_{3,0}=\frac{\{\varphi_3\}^T[m]\{u_0\}}{M_3}=0.2472$$

$$\dot{Y}_{1,0}=\frac{\{\varphi_1\}^T[m]\{\dot{u}_0\}}{M_1}=11.6315 \quad \dot{Y}_{2,0}=\frac{\{\varphi_2\}^T[m]\{\dot{u}_0\}}{M_2}=11.3736 \quad \dot{Y}_{3,0}=\frac{\{\varphi_3\}^T[m]\{\dot{u}_0\}}{M_3}=1.9950$$

چون میرایی سیستم صفر می باشد، تغییرمکان های مدی از رابطهٔ زیر بدست می آیند:

$$Y_i(t)=\frac{\dot{Y}_{i0}}{\omega_i}\sin(\omega_i t)+Y_{i0}\cos(\omega_i t) \quad , \quad i=1,2,\cdots,N$$

پس:

$$Y_1(t)=\left[\frac{\dot{Y}_{1,0}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)+Y_{1,0}\cos(\omega_1 t)\right]=1.6958\sin(6.8590t)+1.1134\cos(6.8590t)$$

$$Y_2(t)=\left[\frac{\dot{Y}_{2,0}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)+Y_{2,0}\cos(\omega_2 t)\right]=0.5882\sin(19.3351t)+1.6395\cos(19.3351t)$$

$$Y_3(t)=\left[\frac{\dot{Y}_{3,0}}{\omega_3}\sin(\omega_3 t)+Y_{3,0}\cos(\omega_3 t)\right]=0.0714\sin(27.9250t)+0.2472\cos(27.9250t)$$

تغییرمکان درجات آزادی مختلف از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\{u(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\varphi_i\}Y_i(t)$$

در نتیجه:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.6681 \\ 2.0074 \end{Bmatrix}Y_1(t)+\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.2986 \\ -0.8706 \end{Bmatrix}Y_2(t)+\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.4028 \\ 0.7788 \end{Bmatrix}Y_3(t)$$

بنابراین:

$$u_1(t)=1.6958\sin(6.8590t)+1.1134\cos(6.8590t)+0.5882\sin(19.3351t)+1.6395\cos(19.3351t)+0.0714\sin(27.9250t)+0.2472\cos(27.9250t)$$

$$u_2(t)=2.8288\sin(6.8590t)+1.8573\cos(6.8590t)+0.1756\sin(19.3351t)+0.4896\cos(19.3351t)-0.1002\sin(27.9250t)-0.3468\cos(27.9250t)$$

$$u_3(t)=3.4041\sin(6.8590t)+2.2350\cos(6.8590t)-0.5123\sin(19.3351t)-1.4273\cos(19.3351t)+$$
$$0.0556\sin(27.9250t)+0.1925\cos(27.9250t)$$

نیروی وارد بر هر یک از درجات آزادی از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\{f_s\}=[k]\{u\} \quad \Rightarrow \quad f_{s,n}=\sum_{i=1}^{N}k_{ni}u_i$$

بنابراین:

$$f_{s,1}=\sum_{i=1}^{3}k_{1i}u_i=31156u_1-16703u_2=5585\sin(6.8590t)+3667\cos(6.8590t)+14028\sin(19.3351t)$$
$$39094\cos(19.3351t)+2193\sin(27.9250t)-14020\cos(27.9250t)$$

$$f_{s,2}=\sum_{i=1}^{3}k_{2i}u_i=-16703u_1+33407u_2-16703u_3=9318\sin(6.8590t)+6118\cos(6.8590t)$$
$$+4599\sin(19.3351t)+12812\cos(19.3351t)+1226\sin(27.9250t)-18930\cos(27.9250t)$$

$$f_{s,3}=\sum_{i=1}^{3}k_{3i}u_i=-16703u_2+16703u_3=9608\sin(6.8590t)+6309\cos(6.8590t)$$
$$-11490\sin(19.3351t)-32018\cos(19.3351t)-745\sin(27.9250t)+9008\cos(27.9250t)$$

برش پایه از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$V_0(t)=\sum_{n=1}^{3}f_{sn}(t)=24511\sin(6.8590t)+16094\cos(6.8590t)+7137\sin(19.3351t)$$
$$19888\cos(19.3351t)+2674\sin(27.9250t)-23942\cos(27.9250t)$$

پیوست

قضیهٔ ۱- اگر $M_{tot.}$ جرم کل یک قاب برشی باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{N}\frac{L_i^2}{M_i}=M_{tot.}$ که در آن L_i ضریب تحریک مودی و M_i جرم مودی می باشند.

اثبات: جرم کل یک قاب برشی برابر با مجموع جرم های طبقات آن است.

$$M_{tot.}=m_1+m_2+\cdots+m_N \qquad (\text{پ-۱})$$

این رابطه را به صورت ماتریسی می توان نوشت:

$$M_{tot.} = \{1\}^T [m] \{1\} \qquad (پ-۲)$$

بردار $\{1\}$ را بر حسب شکل مدها می توان بسط داد.

$$\{1\} = \sum_{i=1}^{N} \{\varphi\}_i Y_i \qquad (پ-۳)$$

طرفین را در $\{\varphi_j\}^T [m]$ ضرب کرده و از تعامد مودها استفاده می کنیم:

$$\{\varphi_j\}^T [m] \{1\} = M_j Y_j \qquad (پ-۴)$$

چون $L_j = \{\varphi_j\}^T [m] \{1\}$ پس :

(پ-۵)

$$Y_j = \frac{L_j}{M_j}$$

حال بجای بردار $\{1\}$ در رابطهٔ (پ-۲) از رابطهٔ (پ-۳) قرار می دهیم:

$$M_{tot.} = \{1\}^T [m] \left(\sum_{i=1}^{N} \{\varphi_i\} Y_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\{1\}^T [m] \{\varphi_i\} Y_i \right) \qquad (پ-۶)$$

توجه شود که $\{1\}^T [m] \{\varphi_i\}$ اسکالر است. بنابراین با ترانهادهٔ خودش برابر است. یعنی :

$$L_i = \{\varphi_i\}^T [m] \{1\} = \{1\}^T [m] \{\varphi_i\} \qquad (پ-۷)$$

با جایگزینی رابطهٔ (پ-۷) در (پ-۶) خواهیم داشت:

$$M_{tot.} = \sum_{i=1}^{N} L_i Y_i \qquad (پ-۸)$$

بجای Y_i از رابطهٔ (پ-۵) قرار می دهیم:

$$M_{tot.} = \sum_{i=1}^{N} \frac{L_i^2}{M_i}$$ (پ-۹)

قضیهٔ ۲- اگر بردار شکل مودها برای یک قاب برشی نسبت به یکی از سطرها همپایه شده باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1.0$.

که در آن γ_i ضرایب مشارکت مودی هستند.

اثبات :

بردار ضریب تأثیر زلزله $\{1\}$ را می توان بر حسب $\{\varphi\}$ بسط داد:

$$\{1\} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{\varphi_i\}$$ (پ-۱۰)

که در آن α_i ضرایب بسط هستند. طرفین این رابطه را در $\{\varphi_j\}^T[m]$ ضرب می کنیم.

$$\{\varphi_j\}^T[m]\{1\}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_i\} \qquad (\text{پ-۱۱})$$

بنا بر قضیه تعامد مودها سمت راست رابطه فوق برابر است با: $\alpha_j\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\}$. پس:

$$\{\varphi_j\}^T[m]\{r\}=\alpha_j\{\varphi_j\}^T[m]\{\varphi_j\} \qquad (\text{پ-۱۲})$$

بنابراین ضرایب بسط α_j برابرند با:

$$L_j=\alpha_j M_j \;\Rightarrow\; \alpha_j=\frac{L_j}{M_j}=\gamma_j \qquad (\text{پ-۱۳})$$

حال این رابطه را در معادله (پ-۱۰) قرار می دهیم:

$$\{1\}=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\{\varphi_i\} \qquad (\text{پ-۱۴})$$

بنا به فرض قضیه بردار شکل مود نسبت به یکی از سطرها (مثلاً سطر n ام) همپایه شده است. یعنی کلیهٔ درایه های آن سطر برابر ۱/۰ است.

$$\varphi_{ni}=1\;;\; i=1,2,\cdots,N \qquad (\text{پ-۱۵})$$

حال اگر رابطهٔ (پ-۱۴) را برای همان سطر بنویسیم خواهیم داشت

$$1=\gamma_1\varphi_{n1}+\gamma_2\varphi_{n2}+\cdots+\gamma_N\varphi_{nN}=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i \qquad (\text{پ-۱۶})$$